

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

7

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1936

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК СЕДЬМОЙ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ

Москва, Центр, Б. Комсомольский пер., 6, ОНТИ, Главная редакция общетехнической литературы и монографий.

Этот сборник, как и предыдущие сборники «Математическое просвещение», содержит научные статьи по элементарной математике и простейшим вопросам высшей математики.

Сборник рассчитан на весьма широкий круг читателей, интересующихся математикой: сильных учеников и студентов, преподавателей всех видов учебных заведений, любителей математики и др.

Редакция *Р. Н. Бончковского*. Оформление *С. Л. Дыман*.
Корректурa *Л. А. Дединской*. Выпускающий *Я. Я. Вигонт*.
Сдано в производство 29/XII 1935 г. Подписано к печати 19 II 1936 г.
Листов 5 Уч. авт. л. 6^{1/4}. Тираж 5000. Формат 62×94 1/16. Печ. зн. в листе 46.000.
Заказ № 1487. Гл. редакт. общ. лист. 130. Уполн. Главлита В-35521

16-я типография треста «Полиграфкнига», Трехпрудный пер., 9.

ВПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ С РЕБРАМИ, РАВНЫМИ РАДИУСУ ШАРА

С. А. Богомолов (Ленинград)

Известно, что одним из таких многогранников является кубооктаэдр; я ставлю себе задачей систематический вывод всех таких многогранников, ограничиваясь выпуклыми фигурами.

Итак, пусть в шар радиуса a вписан выпуклый многогранник, у которого все ребра равны a . Граниями его будут служить выпуклые вписанные многоугольники с равными сторонами; легко видеть, что все углы такого многоугольника опираются на равные дуги окружности, а потому тоже будут равны между собой. Следовательно, грани искомых многогранников должны быть правильными многоугольниками.

Возьмем одну из них — правильный n -угольник $ABCD \dots$ — и соединим центр шара O с его вершинами (фиг. 1); при точке O получим n равносторонних треугольников, так что все их углы равны 60° :

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \dots = 60^\circ.$$

Если центр шара лежит в плоскости грани, то тогда должно быть

$$n \cdot 60^\circ = 360^\circ, \text{ или } n = 6;$$

в противном случае получаем многогранный угол с вершиной в точке O , и по известной теореме

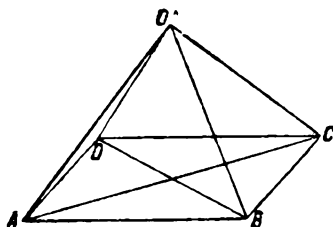
$$n \cdot 60^\circ < 360^\circ,$$

откуда

$$n = 3, 4, 5.$$

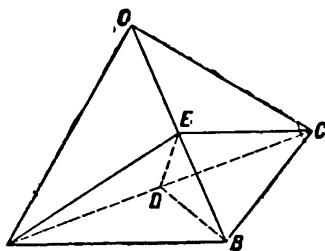
Итак, гранями наших многогранников могут быть только: треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольник; при этом шестиугольник может быть только один. В силу выпуклости в последнем случае многогранник будет вписан в полушар.

Для дальнейшего нам нужно вычислить двугранные углы пирамид, получающихся при соединении центра шара с вершинами какой-либо грани. Ясно, что шестиугольной пирамиды не может быть, так что нужно рассматривать только случаи $n = 3, 4, 5$. Все эти пирамиды будут правильными, так как основанием каждой из них служит правильный многоугольник, и вследствие равенства



Фиг. 1.

ребер основание высоты упадет в центр этого многоугольника. Обозначим двугранные углы телесного угла при вершине для указанных случаев соответственно через $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$. Нетрудно убедиться,



Фиг. 2.

что эти пирамиды являются частями правильных многогранников, и отсюда вычислить их двугранные углы; но можно их вычислить и непосредственно.

На фиг. 2 изображена часть пирамиды с двугранным углом при ребре OB (его величину обозначим через z); угол AEC есть перпендикулярное к этому ребру сечение, проходящее через диагональ AC ; кроме того, D есть середина этой диагонали. Из прямоугольных треугольников имеем:

$$AD = AE \cdot \sin \frac{z}{2},$$

$$AD = a \cdot \sin \angle ABD = a \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) = a \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

$$AE = a \cdot \sin 60^\circ;$$

подставляя, находим

$$\cos \frac{180^\circ}{n} = \sin 60^\circ \cdot \sin \frac{z}{2},$$

$$\sin \frac{z}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Давая числу n возможные значения 3, 4, 5, находим:

$$\sin \frac{\alpha_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha_3 \approx 70^\circ 31' 44''.$$

$$\sin \frac{\alpha_4}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \alpha_4 \approx 109^\circ 28' 16''.$$

$$\sin \frac{\alpha_5}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos 36^\circ; \quad \alpha_5 \approx 138^\circ 11' 23''.$$

Остановимся теперь на радиусе OA , соединяющем центр шара с какой-нибудь вершиной A вписанного многогранника. При радиусе OA сходятся несколько правильных пирамид наименований 3, 4, 5; их двугранные углы в сумме должны дать 360° . Наименования этих пирамид соответствуют наименованиям граней, сходящихся в вершине A (фиг. 3). Пусть в A сходятся x треугольников, y четырехугольников и t пятиугольников; тогда должно быть

$$x \cdot \alpha_3 + y \cdot \alpha_4 + t \cdot \alpha_5 = 360^\circ.$$

Решим это неопределенное уравнение, причем сначала возьмем углы только с точностью до полградуса, а возможные решения затем исследуем со всей строгостью. Итак, приближенно имеем:

$$x \cdot 70,5^\circ + y \cdot 109,5^\circ + t \cdot 138^\circ = 360^\circ.$$

Легко видеть, что должно быть $t < 3$; разберем по порядку возможные случаи:

1) $t = 2$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ + y \cdot 109,5^\circ \approx 84^\circ,$$

и легко видеть, что это уравнение не удовлетворяется ни при каких целых и положительных значениях x и y .

2) $t = 1$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ + y \cdot 109,5^\circ \approx 222^\circ$$

и y не может быть больше 2.

2а) $y = 2$; для x возможно только значение $x = 0$; но в правой части остается лишних 3° , что не покрывается погрешностью наших значений для углов.

2б) $y = 1$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 112,5^\circ,$$

что невозможно.

2в) $y = 0$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 222^\circ,$$

что невозможно.

3) $t = 0$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ + y \cdot 109,5^\circ \approx 360^\circ,$$

и легко видеть, что $y \leq 3$.

3а) $y = 3$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 31,5^\circ,$$

что невозможно.

3б) $y = 2$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 141^\circ,$$

и для x получается возможное значение $x = 2$. Проверим это решение; выше мы имели формулы:

$$\sin \frac{\alpha_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \sin \frac{\alpha_4}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда:

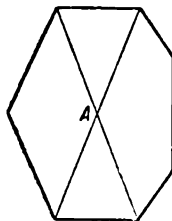
$$\cos \frac{\alpha_4}{2} = \sin \frac{\alpha_3}{2},$$

$$\frac{\alpha_3}{2} + \frac{\alpha_4}{2} = 90^\circ,$$

$$2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 360^\circ.$$

Итак, получилось возможное решение:

$$x = y = 2, \quad t = 0.$$



Фиг. 3.

3в) $y = 1$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 250,5^\circ,$$

что невозможно.

3г) $y = 0$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 360^\circ,$$

что невозможно.

Предыдущее рассуждение приводит к выводу, что в случае, когда нет шестиугольной грани, все вершины искомого многогранника будут четырехгранными, и в каждой из них сходятся два равносторонних треугольника и два квадрата.

Пусть теперь центр шара лежит в плоскости возможной шестиугольной грани; тогда в силу выпуклости остальные грани лежат по одну сторону от нее, так что

$$x \cdot 70,5^\circ + y \cdot 109,5^\circ + t \cdot 138^\circ \approx 180^\circ.$$

Легко видеть, что должно быть $t = 0$ и $y < 2$.

1) $y = 1$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 70,5^\circ.$$

Отсюда $x = 1$, и по предыдущему убеждаемся в правильности этого решения.

2) $y = 0$; тогда

$$x \cdot 70,5^\circ \approx 180^\circ,$$

что невозможно. Итак, если имеется шестиугольная грань, то все ее вершины трехгранны и кроме правильного шестиугольника в каждой из них сходятся равносторонний треугольник и квадрат; с остальными вершинами дело обстоит так же, как в предыдущем случае.

Попробуем допустить, что центр шара лежит вне многогранника, и пусть ω есть грань, ближайшая к центру, и точка A — одна из ее вершин. Тогда по свойству выпуклости все остальные грани лежат по одну сторону от ω . Возьмем пирамиду с вершиной в центре шара и с основанием ω ; продолжения ее боковых граней составляют с плоскостью ω тупые углы. Грани же многогранника, прилежащие к ω , образуют с этой плоскостью острые углы, так как только при этом условии перпендикуляры, восстановленные в их центрах, пройдут через центр шара. Поэтому двугранные углы при ребре OA пирамид с основаниями в этих гранях явятся частями двугранного угла OA в многогранном угле при центре шара. Отсюда легко вывести, что двугранный угол OA пирамиды с основанием ω будет равен или больше суммы двугранных углов при OA тех двух пирамид, у которых основаниями служат две грани, прилежащие к ω и имеющие общую вершину A . Вспоминая величины углов $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, видим, что это невозможно.

Таким образом мы получили уже все возможные случаи; остается точнее охарактеризовать соответствующие им многогранники, для чего воспользуемся известной теоремой Эйлера. Введем

следующие обозначения: m — число граней многогранника; m_3 — число треугольных граней; m_4 — число четырехугольных граней; v — число вершин; r — число ребер.

Начнем со случая, когда нет шестиугольной грани; тогда все вершины четырехгранны. При каждой вершине сходятся четыре ребра, но каждое ребро принадлежит двум вершинам, так что

$$4v = 2r,$$

$$r = 2v.$$

По теореме Эйлера имеем:

$$m + v = r + 2.$$

Подставляем найденное значение r и приходим к равенству

$$v = m - 2.$$

С другой стороны, ребра можно считать по граням, но и здесь каждое ребро будет сосчитано дважды, так что

$$3m_3 + 4m_4 = 2r.$$

Подставляя сюда

$$r = 2v, \quad v = m - 2, \quad m = m_3 + m_4,$$

получим:

$$3m_3 + 4m_4 = 4m_3 + 4m_4 - 8,$$

откуда

$$m_3 = 8.$$

Так как у каждой из v вершин сходятся два треугольника и два квадрата, то, считая вершины этих граней, найдем соотношения:

$$3m_3 = 2v \quad \text{и} \quad 4m_4 = 2v,$$

откуда

$$v = 12, \quad m_4 = 6, \quad m = 14, \quad r = 24.$$

Итак, мы нашли все числа, характеризующие многогранник.

Пусть теперь имеется шестиугольная грань и притом только одна, так что

$$m = m_3 + m_4 + 1;$$

в этом случае имеется шесть трехгранных вершин; остальные — четырехгранные, и пусть число их будет v_4 . Считая ребра, здесь имеем:

$$18 + 4v_4 = 2r,$$

откуда

$$r = 2v_4 + 9.$$

По теореме Эйлера

$$m + v = 2v_4 + 11,$$

$$m + 6 + v_4 = 2v_4 + 11,$$

откуда

$$v_4 = m - 5.$$

Считая теперь число ребер по граням, находим:

$$3m_3 + 4m_4 + 6 = 2r = 4v_4 + 18 = 4m - 2;$$

подставляя значение m , получаем:

$$m_3 = 4.$$

Подсчет числа вершин треугольных граней дает

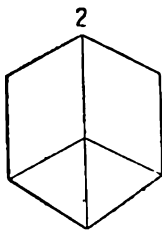
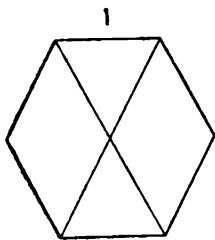
$$3m_3 = 6 + 2v_4,$$

откуда

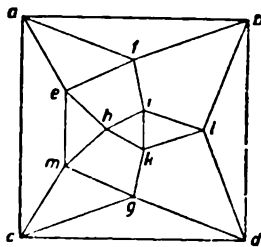
$$v_4 = 3, \quad m = 8, \quad m_4 = 3, \quad v = 9, \quad r = 15,$$

и все характерные числа найдены.

Теперь встает задача о построении многогранников, определенных этими числами; для этого построим сначала их «сети».



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Сеть есть плоская совокупность многоугольников, одноименных с гранями многогранника и расположенных тем же самым образом; сеть можно получить, проектируя все грани на одну из них из точки, лежащей вне многогранника и достаточно близко к выбранной грани. В зависимости от выбора основной грани сеть может иметь различные формы, но она вполне пригодна для изучения вопросов расположения граней; соотношение же метрического характера совершенно теряется при переходе к сети.

Начнем со случая, когда нет шестиугольника, и вспомним числа, характеризующие такой многогранник:

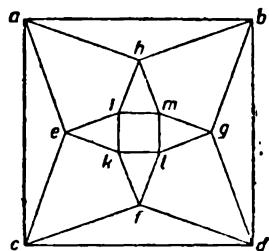
$$m = 14, \quad m_3 = 8, \quad m_4 = 6, \quad v = 12,$$

и все вершины — четырехгранны. У каждой вершины сходятся два треугольника и два квадрата; расположение граней может быть двояким; оба случая представлены схематически на фиг. 4.

В качестве основной грани возьмем один из четырехугольников ($abdc$ на фиг. 5) и допустим, что при вершине a имеет место второе расположение граней; пусть, далее, по стороне ac к ней примыкает другой четырехугольник. Тогда при вершине a должны сходиться еще два треугольника; то же самое будет и при вершине c ; пусть это будут треугольники aei , abf , cmg , cdg . Теперь к вершине e надо присоединить еще один треугольник; но если его присоединить по ребру ef , то в точке f сойдутся три треугольника, что невозможно; поэтому присоединяем треугольник emh по ребру em . Для того чтобы покончить с вершинами e и m , остается дополнить ломаные feh и hmg до четырехугольников feh и

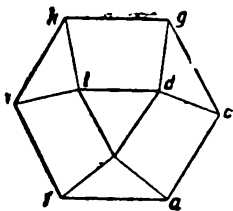
hmgk. Таким образом при вершинах *e* и *m* получилось расположение граней первого типа, и мы убеждаемся, что невозможен многогранник, у которого при всех вершинах расположение граней было бы второго типа. Далее очевидно, что при точке *h* надо присоединить треугольник *hik*. Осталось еще два треугольника и два четырехугольника: ломаные *bfi* и *dgk* придется дополнять до четырехугольников, а тогда по *bd* необходимо присоединяется треугольник и последний треугольник *ikl* замыкает фигуру. Полученная сеть действительно характеризуется указанными выше числами.

Мы видим, что второе расположение граней влечет за собой и первое; попробуем теперь построить сеть такого многогранника, у которого при каждой вершине имело бы место расположение граней первого типа. В качестве основной грани опять возьмем один из четырехугольников (*abcd* на фиг. 6).

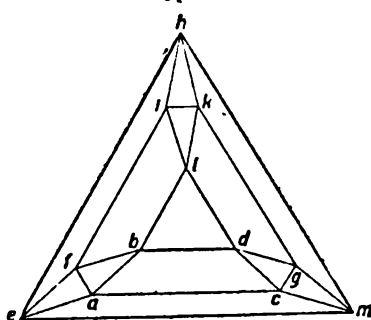


Фиг. 6.

Если грани должны расположиться по первому типу, то ко всем сторонам четырехугольника *abcd* надо приложить треугольники, а между ними — у всех четырех вершин по четырехугольнику. Далее, у новых вершин *h, e, f, g* присоединяем по треугольнику, и совершенно ясно, как именно это надо сделать; последний четырехугольник *iklm* замыкает фигуру. Полученная сеть соответствует указанным выше числам.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Переходим к случаю, когда имеется шестиугольная грань; здесь характеризующие числа таковы:

$$m = 8, \quad m_3 = 4, \quad m_4 = 3, \quad m_6 = 1;$$

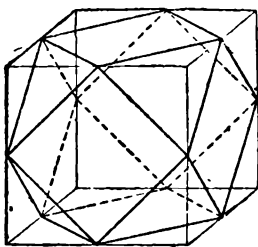
$$v = 9, \quad v_3 = 6, \quad v_4 = 3, \quad r = 15.$$

Сеть строится на том основании, что к сторонам шестиугольника *acgkif* (фиг. 7) должны попеременно прилегать треугольники и четырехугольники, причем все вершины основного шестиугольника трехгранны; затем треугольник *bdl* замыкает фигуру, которая и решает вопрос.

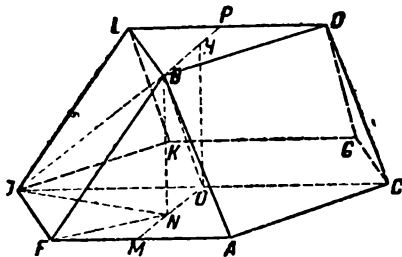
Возвращаемся к сети, изображенной на фиг. 5; она станет симметричнее и удобнее для дальнейших построений, если за основную грань взять треугольник ehm или bdl ; на фиг. 8 за основную грань взят треугольник ehm с сохранением прежних обозначений для вершин.

Руководствуясь полученными сетками, теперь мы должны построить соответствующие многогранники. Сетка фиг. 6 соответствует хорошо известному в геометрической кристаллографии кубооктаэдру, о котором также давно известно, что все его ребра равны радиусу описанного шара. Для построения этого многогранника возьмем куб и отметим середины всех его ребер; затем соединим отрезками середины ребер, сходящихся в одной и той же вершине куба (отбросив эти вершины). Получаем треугольные и четырехугольные грани и притом в таком числе и в таком расположении, как это требуется нашей сеткой (фиг. 9).

Легко видеть, что все ребра построенного таким образом многогранника равны половине диагонали первоначального квадрата;



Фиг. 9.



Фиг. 10.

кроме того, стороны четырехугольников будут взаимно перпендикулярны, так как они параллельны диагоналям квадрата; следовательно, все грани — правильные многоугольники. Далее ясно, что центр описанного шара будет находиться в центре первоначального куба; его радиус равен расстоянию этого центра от середины ребра, т. е. он равен половине диагонали квадрата, служившего гранью куба. Итак, все требования выполнены; что касается вопроса о единственности построения многогранника по данной сетке, то об этом см. ниже.

Переходим к построению многогранника, определяемого сеткой фиг. 7. С этой целью возьмем шар радиуса a , проведем на его поверхности окружность большого круга и впишем в него правильный шестиугольник $ACGKIF$ (фиг. 10). Для того чтобы построить треугольник, занимающий в нашей сетке центральное место, поступаем следующим образом:

В центре шара O восстанавливаем перпендикуляр к плоскости шестиугольника и откладываем на нем отрезок

$$OH = a \sqrt{\frac{2}{3}};$$

через точку H проводим плоскость, перпендикулярную к OH , ко-

торая пересекает шар по малому кругу радиуса HB ; этот радиус определяется из треугольника OBH :

$$HB = \sqrt{(OB)^2 - (OH)^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

В полученный малый круг вписываем правильный треугольник BDL так, чтобы его сторона DL была параллельна KG , и вычисляем его сторону:

$$DL = HB \cdot \sqrt{3} = a;$$

кроме того,

$$HP = \frac{1}{2} \cdot HB = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Теперь вершину B треугольника BDL соединяем с A и F , вершину D — с C и G , вершину L — с I и K ; построенный таким образом многогранник $ACGKIFBDL$ и будет искомым.

Для доказательства проведем BN перпендикулярно плоскости шестиугольника и $OM \perp FA$; легко видеть, что

$$ON = BH \text{ и } NM = HP.$$

Вычислим длины ребер, соединяющих вершины шестиугольника с вершинами треугольника; из треугольника NMF имеем:

$$FN = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

из треугольника BFN имеем:

$$BF = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2}{3}} = a,$$

и подобное же имеет место для других ребер. Таким образом все ребра нашего многогранника равны a .

Четырехугольник $BFIL$ есть, очевидно, ромб; надо доказать, что это — квадрат, для чего вычислим диагональ BI . Из треугольника INO

$$IN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

из треугольника BIN

$$BI = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 + \frac{4}{3}a^2} = a\sqrt{2};$$

следовательно, в треугольнике BFI :

$$(BI)^2 = (BF)^2 + (FI)^2,$$

так что

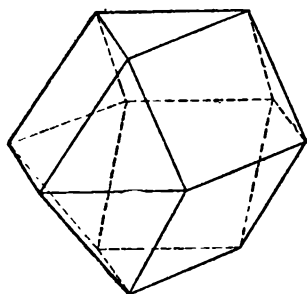
$$\angle BFI = 90^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Подобным же образом рассматриваются и другие четырехугольники. Мы убеждаемся, что многогранник, изображенный на фиг. 10, является решением задачи; к вопросу о его единственности вернемся ниже.

Наконец, надо построить многогранник по сети, изображенной на фиг. 8. Всматриваясь в нее внимательно, замечаем, что она как бы составлена из двух сетей фиг. 7, сложенных по шестиугольнику $acgkif$ (предполагая этот многоугольник плоским).

Это наводит на мысль о построении искомого многогранника путем соединения двух многогранников фиг. 10 по основному шестиугольнику, что вполне возможно, так как этот многогранник был вписан в полушар. Поступая указанным образом, полу-



Фиг. 11.

чаем многогранник, изображенный на фиг. 11 и удовлетворяющий всем требованиям. Этот многогранник представляет любопытный случай так называемого «алломорфизма» по отношению к кубооктаэдру: он составлен из тех же граней, но при ином расположении их.

В заключение естественно поставить вопрос: будут ли построенные выше многогранники представлять единственное решение при данных сетках? Ответ будет утвердительным в силу следующей теоремы Коши: Два выпуклых многогранника, у которых грани соответственно равны и одинаково расположены, равны между собой¹⁾.

Таким образом поставленная выше задача решена вполне.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКОГО И ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

С. И. Зетель (Москва)

Пусть дан остроугольный треугольник ABC (фиг. 1). Треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого служат основания высот данного треугольника, называется *ортоцентрическим треугольником* относительно данного. Касательные к кругу, описанному около треугольника ABC , образуют треугольник $A_2B_2C_2$, называемый *тангенциальным треугольником* относительно данного. Заметим, что углы

$$A_2 = \pi - 2A, \quad B_2 = \pi - 2B,$$

$$C_2 = \pi - 2C.$$

С другой стороны, из подобия треугольников AA_1B и CC_1B следует $AB : CB = A_1B : C_1B$, откуда видно, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$,

¹⁾ О теореме Коши см. Ващенко-Захарченко, Начала Евклида (1880), стр. 608—611. Вполне строгое доказательство можно найти у Hadamard, Leçons de Géométrie élémentaire, т. II, стр. 596—601.

причем $\angle C_1 A_1 B = A$, $\angle A_1 C_1 B = C$. Отсюда $\angle A A_1 C_1 = \frac{\pi}{2} - A$, $\angle C C_1 A_1 = \frac{\pi}{2} - C$. Подобным же образом можно получить:

$$\angle B B_1 A_1 = \frac{\pi}{2} - B, \quad \angle A A_1 B_1 = \frac{\pi}{2} - A,$$

$$\angle C C_1 B_1 = \frac{\pi}{2} - C, \quad \angle B B_1 C_1 = \frac{\pi}{2} - B.$$

Следовательно, *высота данного треугольника служит биссектрисой углов ортоцентрического треугольника*, причем углы ортоцентрического треугольника выражаются формулами:

$$A_1 = \pi - 2A, \quad B_1 = \pi - 2B, \quad C_1 = \pi - 2C.$$

Из равенства углов ортоцентрического и тангенциального треугольников следует их подобие.

Обозначим площади и полупериметры основного, ортоцентрического и тангенциального треугольников соответственно через S, p, S_H, p_H, S_t, p_t . Тогда

$$\frac{S_t}{S_H} = \frac{p_t^2}{p_H^2}, \quad (1)$$

$$S_t = p_t R, \quad (2)$$

$$S = p_H R. \quad (3)$$

Последнее равенство получается из разбиения площади треугольника ABC на сумму площадей трех ортодиагональных четырехугольников $OA_1BC_1, OA_1CB_1, OB_1AC_1$:

$$S = \frac{1}{2} (R \cdot A_1 C_1 + R \cdot A_1 B_1 + R \cdot C_1 B_1) = R p_H.$$

(2) и (3) дают:

$$\frac{S_t}{S} = \frac{p_t}{p_H}. \quad (4)$$

Сравнивая (1) и (4), найдем:

$$\frac{S_t}{S^2} = \frac{S_t}{S_H},$$

или

$$S = \sqrt{S_t S_H}. \quad (5)$$

Таким образом *площадь остроугольного треугольника равна среднему геометрическому между площадями треугольников ортоцентрического и тангенциального*.

Площадь ортоцентрического треугольника S_H можно легко выразить через стороны и углы треугольника ABC .

Пусть стороны ортоцентрического треугольника равны a_1, b_1, c_1 .

Из подобия треугольников C_1AB_1 и CAB имеем:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \cos A; \quad a_1 = a \cos A. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin C_1 = \frac{1}{2} a \cos A \cdot b \cos B \cdot \sin C_1 = \\ &= \frac{1}{2} ab \cos A \cos B \sin 2C = ab \cos A \cos B \cos C \sin C, \end{aligned}$$

$$S_H = 2S \cos A \cos B \cos C.$$

На основании равенства (5) найдем площадь ортоцентрического треугольника:

$$S_t = \frac{S^2}{S_H} = \frac{S}{2 \cos A \cos B \cos C}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_t}{S_H} = \frac{1}{4} \sec^2 A \sec^2 B \sec^2 C.$$

Обозначим отношение площадей $\frac{S_t}{S_H}$ через k^2 и получим:

$$k = \frac{1}{2} \sec A \sec B \sec C.$$

Зная k , можно легко найти R_t и r_H — соответственно радиус круга, описанного около тангенциального треугольника, и радиус круга, вписанного в ортоцентрический треугольник.

Определим r_H :

$$\frac{r_t}{r_H} = k; \quad r_t = R; \quad \frac{R}{r_H} = k; \quad r_H = \frac{R}{k} = 2R \cos A \cos B \cos C. \quad (7)$$

Для определения радиуса круга, описанного около тангенциального треугольника, надо знать R_H . Равенство (6) позволяет легко определить R_H . Действительно,

$$a_1 = 2R_H \sin A_1 = 2R_H \sin 2A = 4R \sin A \cos A;$$

с другой стороны,

$$a_1 = a \cos A = 2R \sin A \cos A.$$

Следовательно,

$$R_H = \frac{R}{2}.$$

Итак, радиус круга, описанного около ортоцентрического треугольника, равен половине радиуса круга, описанного около данного треугольника.

Зная R_H , определим R_t :

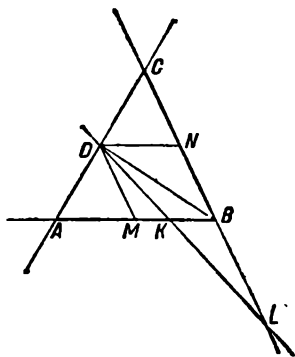
$$\frac{R_t}{R_H} = \frac{\sec A \sec B \sec C}{2}; \quad R_t = \frac{R_H}{2} \sec A \sec B \sec C = \frac{R}{4} \sec A \sec B \sec C.$$

Прежде чем перейти к изучению других интересных свойств ортоцентрического и тангенциального треугольников, рассмотрим

свойства прямых, проходящих через центр круга, вписанного в треугольник. Этому вопросу посвящена моя заметка, помещенная в 1930 г. в журнале «Математическое образование» № 6 (о свойстве прямых, проходящих через центр круга, вписанного в многоугольник). Приведем некоторые результаты, данные мной в указанной заметке.

Напомним свойство прямых, проходящих через точку, взятую на биссектрисе. Пусть через точку D , взятую на биссектрисе угла ABC (фиг. 2), проведена произвольная прямая, пересекающая стороны угла в точках A и C . Проведем $DN \parallel AB$ и $DM \parallel BC$; тогда

$$MD = DN = NB = BM = \frac{BD}{2 \cos \frac{B}{2}}.$$



Фиг. 2.

Из подобия треугольников AMD и ABC имеем:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{AB} &= \frac{MD}{BC}; \quad \frac{AB - BM}{AB} = \frac{MD}{BC}, \\ 1 - \frac{BD}{2AB \cos \frac{B}{2}} &= \frac{BD}{2BC \cos \frac{B}{2}}, \\ \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} &= \frac{2 \cos \frac{B}{2}}{BD}. \end{aligned} \quad (8)$$

Проведем через точку D прямую DL , пересекающую сторону AB в точке K и продолжение стороны BC в точке L :

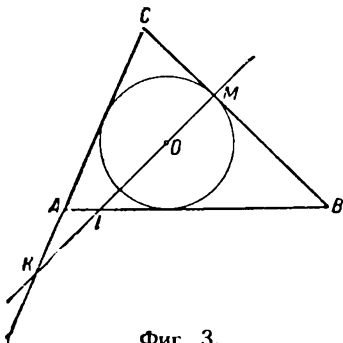
$$\begin{aligned} \frac{DN}{KB} &= \frac{NL}{LB}; \quad \frac{BD}{2KB \cos \frac{B}{2}} = 1 + \frac{NB}{LB}; \\ \frac{BD}{2KB \cos \frac{B}{2}} &= 1 + \frac{BD}{2LB \cos \frac{B}{2}}; \\ \frac{1}{KB} - \frac{1}{LB} &= \frac{2 \cos \frac{B}{2}}{BD}. \end{aligned} \quad (8')$$

Следовательно,

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{KB} - \frac{1}{LB} = \frac{2 \cos \frac{B}{2}}{DB}. \quad (9)$$

Будем считать отрезки, отложенные на сторонах угла, положительными, а отрезки, отложенные за вершиной угла, на продолжении его сторон, — отрицательными (например BL , фиг. 2).

При этом условии равенство (9) можно сформулировать так: *алгебраическая сумма обратных величин отрезков, отсеженных на сторонах угла произвольной прямой, проходящей через точку, взятую на биссектрисе угла, есть величина постоянная для данной точки.*



Фиг. 3.

Пусть через центр O круга, вписанного в треугольник ABC , проведена произвольная прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника (фиг. 3). На основании равенства (9) имеем:

$$\frac{1}{AL} - \frac{1}{AK} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{AO} = \frac{\sin A}{AO \sin \frac{A}{2}} = \frac{\sin A}{r};$$

$$\frac{1}{BL} + \frac{1}{BM} = \frac{\sin B}{r}; \quad \frac{1}{CK} + \frac{1}{CM} = \frac{\sin C}{r};$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{AL} - \frac{1}{AK} + \frac{1}{BL} + \frac{1}{BM} + \frac{1}{CK} + \frac{1}{CM} &= \\ &= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{r} = \frac{p(\sin A + \sin B + \sin C)}{S} = \\ &= \frac{4Rp(\sin A + \sin B + \sin C)}{abc} = \frac{2p(a + b + c)}{abc} = \frac{4p^2}{abc}. \end{aligned}$$

Следовательно, *алгебраическая сумма обратных величин отрезков, отсеженных на сторонах треугольника произвольной прямой, проходящей через центр вписанного круга и не проходящей ни через одну из вершин треугольника, равна квадрату его периметра, деленному на произведение сторон треугольника.*

Так как высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов ортоцентрического, то сумма обратных величин отрезков, отсеженных на сторонах ортоцентрического треугольника произвольной прямой, проходящей через ортоцентр и не проходящей через вершину ортоцентрического треугольника, есть величина постоянная, равная $\frac{4p_H^2}{a_1 b_1 c_1}$:

$$\begin{aligned} \frac{4p_H^2}{a_1 b_1 c_1} &= \frac{4S^2}{abc \cos A \cos B \cos C \cdot R^2} = \frac{4S^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{R^2 \cdot h_a h_b h_c} = \\ &= \frac{16S^4 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{a^2 b^2 c^2 h_a h_b h_c} = \frac{2S \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{abc} = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{2R}. \end{aligned}$$

Итак найденная нами постоянная равна произведению тангенсов углов треугольника, деленному на диаметр описанного круга.

Теперь перейдем к тангенциальному треугольнику. Проведем через центр круга, описанного около данного треугольника и, следовательно, вписанного в тангенциальный, произвольную прямую. Она отсекает отрезки на сторонах тангенциального так, что сумма

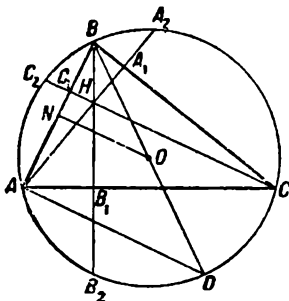
обратных величин этих отрезков будет равна $\frac{4p_i^2}{a_i b_i c_i}$, где p_i — полупериметр, а a_i, b_i, c_i — стороны тангенциального треугольника. Вспомня, что k — коэффициент подобия треугольников тангенциального и ортоцентрического, получим:

$$\begin{aligned} \frac{4p_i^2}{a_i b_i c_i} &= \frac{4p_H^2}{ka_H b_H c_H} = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{2kR} = \frac{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{R \sec A \sec B \sec C} = \\ &= \frac{\sin A \sin B \sin C}{R}. \end{aligned}$$

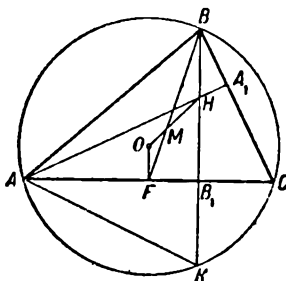
Итак, если через центр круга, описанного около данного треугольника, провести произвольную прямую, не проходящую через вершину ортоцентрического треугольника, то она отсечет на сторонах последнего отрезки, алгебраическая сумма обратных величин которых равна произведению синусов углов данного треугольника, деленному на радиус круга, описанного около данного треугольника.

Эйлером в 1765 г. было доказано, что три замечательные точки треугольника — точка пересечения медиан, центр описанного круга и точка пересечения высот (ортоцентр) — лежат на одной прямой. Эта прямая в геометрии треугольника известна под названием *прямой Эйлера*.

Доказательство теоремы Эйлера основано на следующей простой теореме: ортоцентр H отстоит от каждой вершины треуголь-



Фиг. 4.



Фиг. 5.

ника вдвое далее, нежели центр описанного круга O от противоположной стороны.

Пусть в треугольнике ABC (фиг. 4) BD — диаметр; $ON \perp AB$. Так как $AD = 2ON$ и $AD = HC$ (как противоположные стороны параллелограмма), то $HC = 2ON$, и теорема доказана.

На основании этой теоремы легко доказать теорему Эйлера.

Соединим H с O (фиг. 5) и проведем медиану BF ; из подобия треугольников MOF и BHM имеем:

$$\frac{BM}{MF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{OF}{OF}.$$

По доказанной теореме $\frac{BH}{OF} = 2$; следовательно, $\frac{BM}{MF} = 2$, и точка M — точка пересечения медиан треугольника. Итак, теорема Эйлера доказана.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно свойство треугольника: *основание высоты есть середина отрезка этой высоты от ортоцентра до окружности, описанной около треугольника.*

Опишем около треугольника ABC (фиг. 5) окружность. Соединим вершину A с точкой H и вершину C с точкой K ; тогда $\angle HAB_1 = \angle B_1BC = \angle B_1AK$; $\triangle AB_1H = \triangle AB_1K$. Следовательно, $BH = B_1K$.

Выведенное нами свойство высот треугольника дает интересное следствие (фиг. 4):

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1,$$

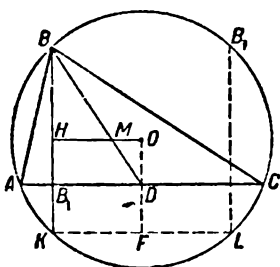
т. е. ортоцентр делит каждую высоту треугольника на два отрезка, произведение которых постоянно.

Действительно,

$$BH \cdot HB_2 = AH \cdot HA_2 = CH \cdot HC_2,$$

$$2BH \cdot HB_1 = 2AH \cdot HA_1 = 2CH \cdot HC_1,$$

$$BH \cdot HB_1 = AH \cdot HA_1 = CH \cdot HC_1.$$



Фиг. 6.

Интересными свойствами обладают ортоцентрический и тангенциальный треугольники относительно треугольника, у которого прямая Эйлера параллельна одной из сторон.

Пусть прямая Эйлера параллельна стороне AC (фиг. 6). В треугольнике ABC

$$\frac{BH}{HB_1} = 2; B_1K = HB_1. \text{ Следовательно, } \frac{BB_1}{B_1K} = 3.$$

Далее, имеем:

$$AB_1 = BB_1 \operatorname{ctg} A; \quad B_1C = BB_1 \operatorname{ctg} C;$$

$$AB_1 \cdot B_1C = BB_1^2 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C.$$

С другой стороны,

$$AB_1 \cdot B_1C = BB_1 \cdot B_1K = \frac{BB_1^2}{3}.$$

Итак,

$$\frac{BB_1^2}{3} = BB_1^2 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C,$$

или

$$\frac{1}{3} = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} C,$$

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 3.$$

(10)

Следовательно, если в треугольнике прямая Эйлера параллельна стороне треугольника, то произведение тангенсов двух углов треугольника постоянно и равно 3.

Далее, на основании известного тождества

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

имеем:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 3 \operatorname{tg} B,$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{2}. \quad (11)$$

Итак, если прямая Эйлера параллельна стороне треугольника, то тангенсы углов треугольника составляют арифметическую прогрессию.

Из равенства (10) и (11) следует, что искомый треугольник всегда остроуголен.

Теперь займемся ортоцентрическим и тангенциальным треугольниками относительно рассматриваемого нами треугольника.

Углы ортогонального и тангенциального треугольников равны, как мы видели:

$$A_1 = \pi - 2A, \quad B_1 = \pi - 2B, \quad C_1 = \pi - 2C.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{A_1}{2} = \frac{\pi}{2} - A; \quad \frac{B_1}{2} = \frac{\pi}{2} - B; \quad \frac{C_1}{2} = \frac{\pi}{2} - C,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = \operatorname{tg} A; \quad \operatorname{ctg} \frac{B_1}{2} = \operatorname{tg} B; \quad \operatorname{ctg} \frac{C_1}{2} = \operatorname{tg} C.$$

Так как в рассматриваемом нами треугольнике ABC тангенсы углов составляют арифметическую прогрессию, то и котангенсы половинных углов ортоцентрического, а следовательно, и тангенциального треугольников составляют арифметическую прогрессию.

Пусть радиус круга, вписанного в ортоцентрический треугольник, равен r_H , тогда имеем:

$$\operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = \frac{p_H - a_1}{r_H}; \quad \operatorname{ctg} \frac{B_1}{2} = \frac{p_H - b_1}{r_H}; \quad \operatorname{ctg} \frac{C_1}{2} = \frac{p_H - c_1}{r_H}.$$

Так как котангенсы половинных углов составляют арифметическую прогрессию, то $p_H - a_1$, $p_H - b_1$, $p_H - c_1$ составляют арифметическую прогрессию. Отсюда заключаем, что и стороны a_1 , b_1 , c_1 составляют арифметическую прогрессию.

Итак, нами доказана следующая теорема: *относительно треугольника, у которого прямая Эйлера параллельна стороне, стороны ортоцентрического, а следовательно, и тангенциального треугольников составляют арифметическую прогрессию.*

В заключение решим следующую задачу: в круг радиуса R (фиг. 6) требуется вписать треугольник ABC , у которого прямая Эйлера параллельна данной стороне AC .

Опустив из центра O на сторону AC перпендикуляр OD , продолжим его до точки F так, что $DF = OD$; проведем через точку

F прямую, параллельную AB , до пересечения в точках K и L с окружностью. Из точек K и L опустим перпендикуляры на сторону AC до пересечения в точках B и B' с окружностью. Треугольники ACB и ACB' — искомые. Если $OD > \frac{R}{2}$, то задача невозможна.

О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ ВИДА $2kn + 1$

М. С. Бритман (УССР, Николаев)

1. Мы имеем в виду доказать теорему: *существует бесконечное множество простых чисел вида $2kn + 1$, где n — какое-либо простое число большее 2.*

Доказательство основано на лемме: *если $x^a - 1$ и $x^b - 1$ делятся на число c , то и $x^r - 1$, где r есть остаток от деления a на b ($a > b$), делится на c .*

Докажем эту лемму.

Обозначив через q частное от деления a на b , имеем: $a = bq + r$. Далее имеем:

$$x^a - 1 = x^{bq+r} - 1 = x^{bq+r} - x^{bq} + x^{bq} - 1 = x^{bq}(x^r - 1) + x^{bq} - 1,$$

откуда

$$x^{bq}(x^r - 1) = (x^a - 1) - (x^{bq} - 1).$$

Принимая во внимание, что $x^{bq} - 1$ делится на $x^b - 1$ и, следовательно, на c , заключаем, что $x^{bq}(x^r - 1)$ делится на c . Так как x^{bq} и c — числа взаимно простые, то $x^r - 1$ делится на c .

Лемма доказана.

2. Пусть d обозначает наибольший общий делитель чисел a и b . Число d является последним остатком в ряде остатков, получаемых при последовательном делении.

Пользуясь только что доказанной леммой, очень легко доказать, что $x^d - 1$ делится на c .

3. Пусть будут: n — простое число ($n > 2$) и x — какое-нибудь целое число ($x > 1$). Разность $x^n - 1$ равна произведению:

$$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1),$$

где второй сомножитель, который мы обозначим через A , есть число нечетное и потому делится на некоторое простое число $l > 2$.

Докажем, что $l \neq n$.

Это очевидно, когда A не делится на n . Поэтому рассмотрим случай, когда A делится на n .

В этом случае $x^n - 1$ делится на n . Кроме того, $x^{n-1} - 1$ также делится на n (по теореме Ферма).

Так как наибольший общий делитель чисел n и $n - 1$ есть 1, то согласно изложенному раньше $x - 1$ делится на n . Ввиду этого $x - 1 = pn$, откуда $x = pn + 1$.

Подставив это значение x в выражение A и пользуясь формулой бинома Ньютона, получаем:

$$\begin{aligned} A &= Bn^2 + (n-1)pn + 1 + (n-2)pn + 1 + \dots + 2pn + 1 + pn + 1 + 1 = \\ &= Bn^2 + pn[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] + n = \\ &= Bn^2 + pn \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n = \left(B + \frac{n-1}{2}p\right)n^2 + n. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что A , делясь на n , не делится на n^2 . Поэтому $A = mn$, где m — нечетное число, не делящееся на n . Так как $A > n$, то $m > 1$. Нам остается принять l равным какому-нибудь простому делителю числа m .

4. Следует обратить внимание на то, что $x - 1$ не делится на l .

В самом деле, предположим, что $x - 1$ делится на l . Следовательно, $x = lq + 1$. После подстановки $lq + 1$ вместо x в выражение A и вынесения l за скобки получим:

$$A = Cl + n.$$

Таким образом мы пришли к неверному заключению, что A не делится на l . Теперь ясно, что $x - 1$ не делится на l .

5. Определим вид этого числа l .

Заметим прежде всего, что на основании теоремы Ферма $x^{l-1} - 1$ делится на l .

Очевидно, возможны только два предположения: 1) n и $l-1$ — числа взаимно простые и 2) n и $l-1$ имеют общий делитель, отличный от 1. Конечно, этот делитель должен равняться n .

Первое предположение приводит к неверному выводу, что $x - 1$ делится на l , и потому заключаем, что $l-1$ делится на n .

Итак $l-1 = sn$, или $l = sn + 1$. Так как $l-1$ — число четное, то s делится на 2, и мы можем положить $s = 2k$. Ясно, что

$$l = 2kn + 1.$$

Теперь мы можем считать доказанной теорему: для каждого простого числа $n > 2$ можно найти такое число k , что сумма $2kn + 1$ будет числом простым, или такую теорему: при n простом и большем 2 разность $x^n - 1$ имеет простой делитель вида $2kn + 1$.

6. Пользуясь этой теоремой, можем утверждать, что выражение

$$(2kn + 1)^n - 1,$$

где n и $2kn + 1$ — простые числа, причем $n > 2$, имеет простой делитель $2k_1n + 1$, где $k_1 \neq k$.

Легко понять, что число

$$[(2kn + 1)(2k_1n + 1)]^n - 1$$

имеет простой делитель $2k_2n + 1$, где k_2 отлично от k и k_1 .

Мы видим теперь, что сколько бы мы ни имели простых чисел вида $2kn + 1$, мы можем найти новое простое число того же вида. Следовательно, множество простых чисел вида $2kn + 1$, где n — простое число большее 2, бесконечно.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ И ТОЖДЕСТВА СТЮАРТА

Н. А. Колмогоров (г. Киров)

Тождество Стюарта (Stewart) касается системы точек на прямой линии и выражается так: *если даны на одной прямой n точек a, b, c, \dots и $(n-1)$ точек m, n, p, \dots , то каковы бы ни были положения этих точек, всегда получим:*

$$\frac{\overline{am} \cdot \overline{an} \cdot \overline{ap} \dots}{\overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot \overline{ad} \dots} + \frac{\overline{bm} \cdot \overline{bn} \cdot \overline{bp} \dots}{\overline{bc} \cdot \overline{bd} \cdot \overline{be} \dots} + \dots = 1.$$

Из этого тождества, как следствие, получается теорема Стюарта: *если на прямой линии даны три точки a, b, c и еще какая-либо точка m на той же прямой или вне ее, то всегда получим:*

$$\frac{\overline{am}^2}{\overline{ab} \cdot \overline{ac}} + \frac{\overline{bm}^2}{\overline{bc} \cdot \overline{ba}} + \frac{\overline{cm}^2}{\overline{ca} \cdot \overline{cb}} = 1,$$

или

$$\overline{am}^2 \cdot \overline{bc} + \overline{bm}^2 \cdot \overline{ca} + \overline{cm}^2 \cdot \overline{ab} + \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \overline{ca} = 0.$$

Доказательство можно найти в курсе высшей геометрии Шаля, изд. 1910 г., стр. 202 и сл.

Настоящая работа посвящена обобщению тождества и теоремы Стюарта на случай системы точек на плоскости и в пространстве.

Пусть дана на плоскости система n точек A, B, C, D, E, \dots и $n-2$ точек M, N, P, \dots ; тогда, соединив их по три в первой системе и соединив каждую точку второй системы с двумя какими-нибудь точками второй системы, мы получим треугольники, между площадями которых существует соотношение (тождество):

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{MAB} \cdot \overline{NAB} \cdot \overline{PAB} \dots}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \frac{\overline{MAC} \cdot \overline{NAC} \cdot \overline{PAC} \dots}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots} + \\ & + \frac{\overline{MAD} \cdot \overline{NAD} \cdot \overline{PAD} \dots}{\overline{ADB} \cdot \overline{ADC} \cdot \overline{ADE} \dots} + \frac{\overline{MAE} \cdot \overline{NAE} \cdot \overline{PAE} \dots}{\overline{AEB} \cdot \overline{AEC} \cdot \overline{AED} \dots} + \dots \\ & \dots + \frac{\overline{MBC} \cdot \overline{NBC} \cdot \overline{PBC} \dots}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \frac{\overline{MBD} \cdot \overline{NBD} \cdot \overline{PBD} \dots}{\overline{BDA} \cdot \overline{BDC} \cdot \overline{BDE} \dots} + \\ & + \frac{\overline{MBE} \cdot \overline{NBE} \cdot \overline{PBE} \dots}{\overline{BEA} \cdot \overline{BEC} \cdot \overline{BED} \dots} + \dots + \frac{\overline{MCD} \cdot \overline{NCD} \cdot \overline{PCD} \dots}{\overline{CDA} \cdot \overline{CDB} \cdot \overline{CDE} \dots} + \dots = 1, \end{aligned}$$

причем площади треугольников взяты со знаками.

Докажем это тождество методом математической индукции. Пусть это тождество будет справедливо для системы $(n-1)$ точек B, C, D, E, \dots и $(n-3)$ точек N, P, \dots . Докажем, что оно будет справедливо и для системы двумя точками больше, т. е. для n

точек первой системы и $(n-2)$ точек второй системы, а именно A, B, C, D, E, \dots и M, N, P, \dots . Составим равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{MAB} \cdot \overline{NAB} \cdot \overline{PAB} \dots}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \frac{\overline{MAC} \cdot \overline{NAC} \cdot \overline{PAC} \dots}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots} + \dots + \\ & + \frac{\overline{MBC} \cdot \overline{NBC} \cdot \overline{PBC} \dots}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \frac{\overline{MBD} \cdot \overline{NBD} \cdot \overline{PBD} \dots}{\overline{BDA} \cdot \overline{BDC} \cdot \overline{BDE} \dots} + \dots + \\ & + \frac{\overline{MDE} \cdot \overline{NDE} \cdot \overline{PDE} \dots}{\overline{DEA} \cdot \overline{DEB} \cdot \overline{DEC} \dots} + \dots = 1. \end{aligned}$$

Пусть все точки обеих систем за исключением одной точки M будут неподвижны. Проведем на плоскости две взаимно-перпендикулярные прямые и примем их за оси координат. Тогда для каждой точки на плоскости можно построить координаты и измерить их определенной единицей. Сделав это, выразим все площади треугольников, которые входят в наше равенство, через координаты их вершин. Ввиду того что из всех точек обеих систем только одна точка M будет иметь переменные координаты x, y , наше равенство будет представлять уравнение первой степени с двумя переменными x, y , т. е. уравнение прямой линии, которую произведет при своем движении точка M . Будем считать, что остальные точки обеих систем не лежат на одной прямой, в частности, на прямой, которую производит точка M . Совместим точку M с какой-нибудь из точек первой системы, например с A , тогда мы получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{NBC} \cdot \overline{PBC} \dots}{\overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \frac{\overline{NBD} \cdot \overline{PBD} \dots}{\overline{BDC} \cdot \overline{BDE} \dots} + \frac{\overline{NBE} \cdot \overline{PBE} \dots}{\overline{BEC} \cdot \overline{BED} \dots} + \\ & + \dots + \frac{\overline{NDE} \cdot \overline{PDE} \dots}{\overline{DEB} \cdot \overline{DEC} \dots} + \dots = 1, \end{aligned}$$

а это равенство, по предположению, представляет собой тождество, следовательно, точка M может занимать положение и не на одной прямой и притом, где угодно. Таким образом тождество, будучи справедливым для двух систем точек, состоящих: первая из $(n-1)$ точек, а вторая из $(n-3)$ точек, оказывается справедливым и для двух систем точек, в каждой из которых будет одной точкой больше, т. е. для систем, состоящих: первая из n точек, а вторая из $(n-2)$ точек. Но доказываемое тождество справедливо для двух систем точек, состоящих: первая из трех точек, а вторая из одной точки, так как имеем:

$$\frac{\overline{MAB}}{\overline{ABC}} + \frac{\overline{MAC}}{\overline{ACB}} + \frac{\overline{MBC}}{\overline{BCA}} = 1,$$

или

$$\overline{MAB} + \overline{MCA} + \overline{MBC} + \overline{CBA} = 0.$$

Следовательно, оно справедливо и для двух систем, состоящих: первая из четырех точек, а вторая из двух точек и т. д., т. е. оно справедливо вообще.

Следствие. Пусть дано тождество:

$$\frac{\overline{MAB} \cdot \overline{NAB} \cdot \overline{PAB} \dots}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \frac{\overline{MAC} \cdot \overline{NAC} \cdot \overline{PAC} \dots}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots} + \dots +$$

$$+ \frac{\overline{MBC} \cdot \overline{NBC} \cdot \overline{PBC} \dots}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \dots + \frac{\overline{MDE} \cdot \overline{NDE} \cdot \overline{PDE} \dots}{\overline{DEA} \cdot \overline{DEB} \cdot \overline{DEC} \dots} + \dots = 1.$$

Будем последовательно удалять все точки второй системы M, N, P, \dots в бесконечность, тогда тождество примет следующий вид:

$$\frac{\overline{ab}^{n-2}}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \frac{\overline{ac}^{n-2}}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots} + \dots +$$

$$+ \frac{\overline{bc}^{n-2}}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \dots + \frac{\overline{de}^{n-2}}{\overline{DEA} \cdot \overline{DEB} \cdot \overline{DEC} \dots} + \dots = 0,$$

где $\overline{ab}, \overline{ac}, \dots, \overline{bc}, \dots$ обозначают прямоугольные проекции отрезков прямых $\overline{AB}, \overline{AC}, \dots, \overline{BC}, \dots$ на произвольную прямую на плоскости.

Пусть все точки второй степени совмещены в данной точке M ; тогда тождество примет вид:

$$\frac{\overline{MAB}^{n-2}}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \frac{\overline{MAC}^{(n-2)}}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots} + \dots +$$

$$+ \frac{\overline{MBC}^{n-2}}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots} + \dots + \frac{\overline{MDE}^{n-2}}{\overline{DEA} \cdot \overline{DEB} \cdot \overline{DEC} \dots} + \dots = 1.$$

Если число $(n-2)$ — четное, то точку M можно взять вне плоскости, на которой лежат точки A, B, C, D, E, \dots первой системы, и равенство сохранит свою силу. Докажем это:

Пусть $n-2 = 2m$; тогда

$$\overline{MAB}^{n-2} = \overline{MBA}^{2m} = (\overline{MAB}^2)^m.$$

Точка M лежит вне плоскости, на которой расположены точки A, B, C, D, E, \dots . Опустим из точки M на эту плоскость перпендикуляр MM_1 и примем точку A за начало прямоугольной системы координат, причем ось AZ проведем параллельно MM_1 ; тогда будем иметь сначала:

$$\overline{MAB}^2 = \overline{M_1AB}^2 + \frac{1}{4} \overline{MM_1}^2 \cdot \overline{Ab}^2 + \frac{1}{4} \overline{MM_1}^2 \cdot \overline{Ab_1}^2,$$

где b и b_1 — проекции точки B на ось AX и на ось AY . Далее, возведем обе части последнего равенства в m -ю степень. На основании формулы бинома Ньютона для трехчлена получим:

$$\begin{aligned} (\overline{MAB^2})^m &= \left[\overline{M_1AB^2} + \frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab^2} + \frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab_1^2} \right]^m = \\ &= (\overline{M_1AB^2})^m + m (\overline{M_1AB^2})^{m-1} \cdot \frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab^2} + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab^2} \right)^m + m (\overline{M_1AB^2})^{m-1} \cdot \frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab_1^2} + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \cdot \overline{Ab_1^2} \right)^m. \end{aligned}$$

Подобно этому можно составить выражения и для $(\overline{MAC^2})^m$ и для $(\overline{MBC^2})^m$ и т. д. Составим эти выражения и разделим все члены каждого из равенств соответственно на следующие произведения: первое равенство на $\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots$, второе равенство на $\overline{ACB} \cdot \overline{ACD} \cdot \overline{ACE} \dots$, третье равенство на $\overline{BCA} \cdot \overline{BCD} \cdot \overline{BCE} \dots$ и т. д. После этого просуммируем эти равенства почленно, тогда получим:

$$\begin{aligned} \sum \frac{(\overline{MAB^2})^m}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} &= \sum \frac{(\overline{M_1AB^2})^m}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \\ &+ \frac{1}{4} m \cdot \overline{MM_1^2} \cdot \sum \frac{(\overline{M_1AB^2})^{m-1} \cdot \overline{Ab^2}}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots} + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{4} \overline{MM_1^2} \right)^m \cdot \sum \frac{(\overline{Ab_1^2})^m}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD} \cdot \overline{ABE} \dots}, \end{aligned}$$

где сумма распространяется на вышеуказанные выражения, т. е. на выражения для $(\overline{MAC^2})^m$, $(\overline{MAD^2})^m$, $(\overline{MAE^2})^m$, $(\overline{MBC^2})^m$, разделенные на соответствующие им произведения.

Так как точка M_1 лежит на плоскости, на которой расположены точки A, B, C, D, E, \dots , то первый член правой части полученного равенства равен единице, а все остальные члены обращаются в нуль, поэтому левая часть равенства равна единице, что и требовалось доказать.

Аналог теоремы Стюарта. Если на плоскости будут даны четыре точки A, B, C, D и вне плоскости одна точка M , то получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MAB^2}}{\overline{ABC} \cdot \overline{ABD}} + \frac{\overline{MAC^2}}{\overline{ACB} \cdot \overline{ACD}} + \frac{\overline{MAD^2}}{\overline{ADC} \cdot \overline{ADB}} + \frac{\overline{MBC^2}}{\overline{BCA} \cdot \overline{BCD}} + \\ + \frac{\overline{MBD^2}}{\overline{BDA} \cdot \overline{BDC}} + \frac{\overline{MCD^2}}{\overline{CDA} \cdot \overline{CDB}} = 1, \end{aligned}$$

которое является следствием предыдущего. Это и есть аналог теоремы Стюарта.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ¹⁾

В. Н. Рутковский (Витебск)

Теорема 1. Угол между двумя диаметрами окружности (и равносторонней гиперболы) равен углу между сопряженными им хордами.

Доказательство. Для окружности эта теорема является следствием того, что сопряженные направления в окружности перпендикулярны, а углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны.

Для равносторонней гиперболы эта теорема может быть доказана так:

$y = k_1 x$ — уравнение первого диаметра,

$y = \frac{1}{k_1} x + l_1$ — уравнение сопряженной ему хорды,

$y = k_2 x$ — уравнение второго диаметра,

$y = \frac{1}{k_2} x + l_2$ — уравнение сопряженной ему хорды,

θ_1 — угол между диаметрами,

θ_2 — угол между хордами;

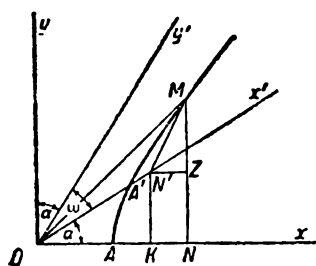
тогда

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}}{1 + \frac{1}{k_1 k_2}} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg} \theta_2,$$

$$\theta_1 = \theta_2.$$

Теорема 2. Уравнение $x^2 - y^2 = a^2$ есть уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к сопряженным диаметрам.



Фиг. 1.

Доказательство. Уравнение $x^2 - y^2 = a^2$, как известно, есть уравнение равносторонней гиперболы, отнесенной к осям симметрии, которые являются сопряженными диаметрами гиперболы.

Докажу, что вид уравнения не изменится, если за оси координат принять другую пару сопряженных диаметров.

На фиг. 1 $MN' \parallel OY'$, $N'K \parallel MN \parallel OY'$ и прямые OX' и OY' суть сопряженные диаметры.

Поэтому, на основании теоремы 1:

$$\angle XOX' = \angle YOY' = \angle ZMN' = \alpha,$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} - 2\alpha,$$

¹⁾ См. также статью Д. И. Перепелкина, Геометрическая теория гиперболических функций, «Математическое просвещение», выпуск 2, ГТТИ, 1935.

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha, \\y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.\end{aligned}$$

Уравнение гиперболы в осях XY :

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

где

$$a = OA.$$

Уравнение гиперболы в осях $X'Y'$:

$$(x' \cos \alpha + y' \sin \alpha)^2 - (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 = a^2,$$

или

$$x'^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - y'^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = a^2,$$

или

$$x'^2 - y'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha}.$$

Полагаю $\frac{a^2}{\cos 2\alpha} = a'^2$. Тогда

$$x'^2 - y'^2 = a'^2.$$

Чтобы найти геометрическое значение a' , найду координаты m , n точки A' и длину отрезка OA' :

$$n = \operatorname{tg} \alpha \cdot m; \quad m^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m^2 = a'^2;$$

$$m = \frac{a}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad n = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}};$$

$$OA' = \sqrt{\frac{a^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = a \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = a'.$$

Таким образом $a' = OA'$.

Так как $\cos 2\alpha = \sin \omega$, то

$$a'^2 = \frac{a^2}{\sin \omega}.$$

Теорема 3. *Площадь кривой в косоугольных координатах:*

$$u = \sin \omega \cdot \int_a^b y dx.$$

Доказательство. На фиг. 2 имеем:

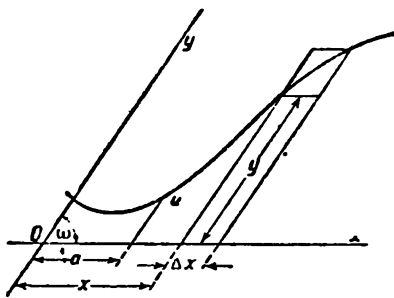
$$y \cdot \Delta x \cdot \sin \omega < \Delta u < (y + \Delta y) \cdot \Delta x \cdot \sin \omega,$$

$$y \sin \omega < \frac{\Delta u}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin \omega,$$

$$\frac{du}{dx} = y \sin \omega.$$

Отсюда

$$u = \sin \omega \cdot \int_a^b y dx.$$



Фиг. 2.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Отношение полухорды к сопряженному полудиаметру равносторонней гиперболы есть гиперболический синус удвоенной площади сектора, деленной на квадрат главного полудиаметра, а отношение отрезка продолженного полудиаметра от центра до точки пересечения сопряженной хорды к сопряженному полудиаметру есть гиперболический косинус.

Доказательство. На фиг. 1 имею:

$$\begin{aligned} \text{пл. } OA'M &= u = \frac{1}{2} x' y' \sin \omega - \sin \omega \cdot \int_{a'}^{x'} y' dx' = \\ &= \frac{1}{2} x' y' \sin \omega - \frac{1}{2} x' y' \sin \omega + \frac{a'^2 \sin \omega}{2} \ln(x' + y') - \\ &- \frac{a'^2 \sin \omega}{2} \ln a' = \frac{a'^2 \sin \omega}{2} \ln \left(\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{a'} \right) = \frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{a'} \right). \end{aligned}$$

В этих равенствах заменяю y' на $-y'$:

$$\frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x'}{a'} - \frac{y'}{a'} \right) = -\frac{1}{2} x' y' \sin \omega + \sin \omega \cdot \int_{a'}^{x'} y' dx' = -u.$$

Таким образом имею:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x'}{a'} + \frac{y'}{a'} \right) &= \frac{2u}{a^2}, \\ \ln \left(\frac{x'}{a'} - \frac{y'}{a'} \right) &= -\frac{2u}{a^2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{x'}{a'} + \frac{y'}{a'} &= e^{\frac{2u}{a^2}}, \\ \frac{x'}{a'} - \frac{y'}{a'} &= e^{-\frac{2u}{a^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{x'}{a'} &= \frac{e^{\frac{2u}{a^2}} + e^{-\frac{2u}{a^2}}}{2} = \operatorname{ch} \frac{2u}{a^2}, \\ \frac{y'}{a'} &= \frac{e^{\frac{2u}{a^2}} - e^{-\frac{2u}{a^2}}}{2} = \operatorname{sh} \frac{2u}{a^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, общезвестная интерпретация гиперболических функций представляет частный случай ($\omega = \frac{\pi}{2}$, $a = 1$) данной здесь интерпретации.

ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ

Так как на фиг. 1 направления OX' и OY' сопряжены, то

$$ON'^2 - MN'^2 = OA'^2.$$

Отсюда

$$\frac{ON'^2}{OA'^2} - \frac{MN'^2}{OA'^2} = 1,$$

или

$$\text{ch}^2 \frac{2u}{a^2} - \text{sh}^2 \frac{2u}{a^2} = 1,$$

или, полагая $\frac{2u}{a^2} = \varphi$,

$$\text{ch}^2 \varphi - \text{sh}^2 \varphi = 1.$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ

На фиг. 3 направления BF и OA , а также CD и OB сопряжены и $CK \parallel BF \parallel DZ$, а $DM \parallel OK$.

Введем обозначения:

площ. $OBA = u_1$; площ. $OBC = u_2$;

$$\frac{2u_1}{a^2} = \varphi_1; \quad \frac{2u_2}{a^2} = \varphi_2.$$

Имеем:

$$\text{sh } \varphi_1 = \frac{BF}{OA}; \quad \text{ch } \varphi_1 = \frac{OF}{OA};$$

$$\text{sh } \varphi_2 = \frac{CD}{OB}; \quad \text{ch } \varphi_2 = \frac{OD}{OB};$$

$$\text{sh } (\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{CK}{OA};$$

$$CK = CM + MK = CM + DZ.$$

На основании теоремы 1

$$\angle AOB = \angle DCM \text{ и } \angle OFB = \angle DMC,$$

как углы с соответственно параллельными сторонами. Отсюда

$$\triangle CDM \sim \triangle FOB; \quad \triangle ODZ \sim \triangle FOB;$$

$$CM = \frac{OF \cdot CD}{OB}; \quad DZ = \frac{BF \cdot OD}{OB}.$$

Значит,

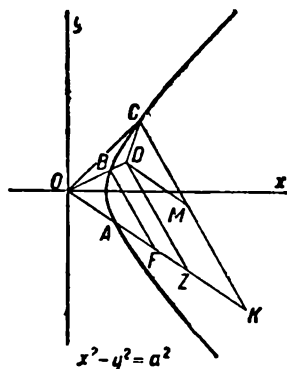
$$CK = \frac{BF \cdot OD}{OB} + \frac{OF \cdot CD}{OB},$$

или

$$\frac{CK}{OA} = \frac{BF \cdot OD}{OA \cdot OB} + \frac{OF \cdot CD}{OA \cdot OB}.$$

Отсюда

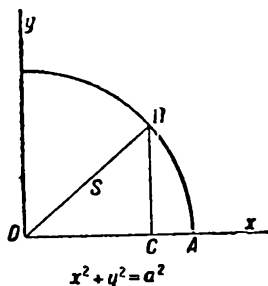
$$\text{sh } (\varphi_1 + \varphi_2) = \text{sh } \varphi_1 \text{ch } \varphi_2 + \text{ch } \varphi_1 \text{sh } \varphi_2.$$



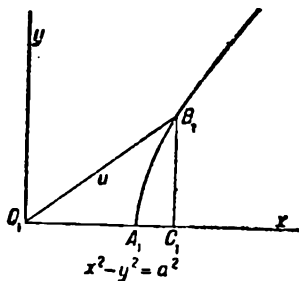
Фиг. 3.

КРУГОВЫЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНИМОГО АРГУМЕНТА

Две пересекающиеся прямые, на одной из которых откладываются действительные числа (действительная ось), а на другой—

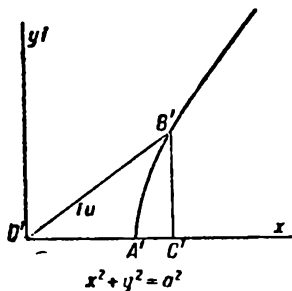


Фиг. 4.

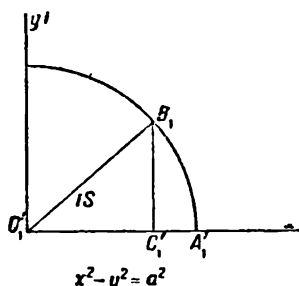


Фиг. 5.

мнимые (мнимая ось), называю комплексными осями координат. Плоскость, проходящую через комплексные оси координат, назы-



Фиг. 6.



Фиг. 7.

ваю комплексной плоскостью. Графики окружности и равносторонней гиперболы на действительной плоскости даю на фиг. 4 и 5. Графики этих кривых на комплексной плоскости даю на фиг. 6 и 7.

Полагаю $a = 1$; $2s = \alpha$; $2u = \varphi$. Тогда

$$\sin \alpha = BC; \quad \cos \alpha = OC; \quad (\text{фиг. 4})$$

$$\sin i\varphi = B'C'; \quad \cos i\varphi = O'C'; \quad (\text{фиг. 6})$$

$$\text{sh } \varphi = B_1C_1; \quad \text{ch } \varphi = O_1C_1; \quad (\text{фиг. 5})$$

$$\text{sh } i\alpha = B_1C'_1; \quad \text{ch } i\alpha = O_1C'_1. \quad (\text{фиг. 7})$$

$$\text{Так как } B_1C'_1 = BC \cdot i, \quad \text{то } \text{sh } i\alpha = i \sin \alpha,$$

$$» \quad O_1C'_1 = OC, \quad » \quad \text{ch } i\alpha = \cos \alpha,$$

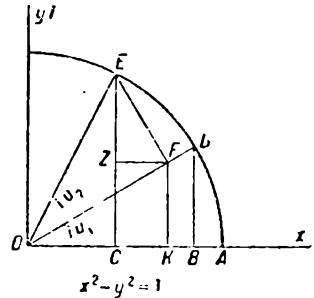
$$» \quad B'C' = B_1C_1 \cdot i, \quad » \quad \sin i\varphi = i \text{sh } \varphi,$$

$$» \quad O'C' = O_1C_1, \quad » \quad \cos i\varphi = \text{ch } \varphi.$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНИМОГО АРГУМЕНТА

На фиг. 8

$$\begin{aligned} OA &= 1; \quad OD = 1; \\ DB &\perp OA; FK \parallel EC \parallel DB; EF \perp OD; LD \parallel OA. \\ \operatorname{sh} i\varphi_1 &= i \cdot DB; \quad \operatorname{ch} i\varphi_1 = OB. \\ \operatorname{sh} i\varphi_2 &= i \cdot EF; \quad \operatorname{ch} i\varphi_2 = OF. \\ \operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2) &= i \cdot EC. \\ EC &= LC + EL = FK + EL. \\ \triangle DBO &\sim \triangle FKO; \quad FK = BD \cdot OF; \\ \triangle DBO &\sim \triangle EFL; \quad EL = OB \cdot EF. \end{aligned}$$



Фиг. 8.

Отсюда

$$\frac{\operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2)}{i} = \frac{\operatorname{sh} i\varphi_1}{i} \cdot \operatorname{ch} i\varphi_2 + \operatorname{ch} i\varphi_1 \cdot \frac{\operatorname{sh} i\varphi_2}{i},$$

или

$$\operatorname{sh} i(\varphi_1 + \varphi_2) = \operatorname{sh} i\varphi_1 \operatorname{ch} i\varphi_2 + \operatorname{sh} i\varphi_2 \operatorname{ch} i\varphi_1.$$

Таким образом круговые и гиперболические функции мнимого аргумента можно изучать на комплексной плоскости по чертежам, известным на действительной плоскости.

О О В ФОРМУЛЕ ЛАГРАНЖА

Б. В. Гнеденко (Москва)

1. В анализе следующая формула:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h), \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)$$

известна под именем формулы Лагранжа.

Зная функцию $f(x)$, всегда (по крайней мере, принципиально) можно найти θ . Так, например,

1) если

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

то

$$\theta \equiv \frac{1}{2};$$

2) если

$$f(x) = e^x,$$

то

$$\theta = \frac{1}{h} \ln \frac{e^h - 1}{h};$$

3) если

$$f(x) = \sin x,$$

то

$$\theta = -\frac{1}{h} \left\{ x - \arccos \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin x] \right\}.$$

Таким образом θ является, вообще говоря, функцией от двух переменных h и x , вполне определяемой заданием функции $f(x)$. Естественно поставить перед собой следующий вопрос: можно ли, зная функцию $\theta = \theta(x, h)$, определить обратно функцию $f(x)$?

В настоящей заметке я отвечаю на следующие два возникающих в связи с этим вопроса: для каких функций $f(x)$

1) $\theta = \theta(x, h)$ будет функцией только x ?

2) $\theta = \theta(x, h)$ будет функцией только h ?

2. Напомню, хотя я этим и не воспользуюсь в дальнейшем, геометрический смысл θ .

Предположим, что имеется непрерывная функция $y = f(x)$ с непрерывной первой производной. Изобразим ее в осях координат $ХОУ$. Возьмем на кривой две точки M и M_1 , соответствующие двум значениям аргумента x и $x + h$, соединим их хордой и проведем в промежутке $(x, x + h)$ касательную к кривой, параллельную этой хорде. Если правый конец абсциссы точки касания обозначить буквой B , а концы абсцисс, соответствующих точкам M и M_1 , — буквами A и C , то θ равно:

$$\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{h}.$$

Может случиться, что при данных x и h функция $\theta(x, h)$ будет многозначна.

Мы ограничимся случаем, когда θ однозначна и обладает конечными производными $\frac{\partial \theta}{\partial h}$, $\frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2}$, $\frac{\partial^3 \theta}{\partial h^3}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ при $h = 0$. Относительно функции $f(x)$ мы предположим, что она обладает конечными производными до четвертого порядка включительно.

3. Теорема 1. При h , стремящемся к нулю, $\theta(x, h)$ принимает в пределе значение $\frac{1}{2}$ независимо от x и $f(x)$:

$$\theta(x, 0) = \frac{1}{2}^1).$$

В самом деле, из (1) находим:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h).$$

Составляем отношение

$$\frac{f'(x + \theta h) - f'(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)}{h}.$$

Предел левой части равен $\theta_0 f''(x)$, где $\theta_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \theta$; предел правой части равен $\frac{1}{2} f''(x)$, в чем нетрудно убедиться путем разложения

¹⁾ Если нарушены условия предыдущего параграфа, то теорема допускает исключения, о которых см. статью Бритмана, Об остаточном члене формулы Тейлора, «Математическое просвещение», выпуск 6, 1936. (Ред.).

в строку Тейлора $f(x+h)$ по степеням h до третьего члена. Отсюда и следует, что

$$\theta(x, 0) = \theta_0 = \frac{1}{2}^1).$$

4. Истолкуем полученный результат геометрически. Функции

$$\theta = \theta(x, h)$$

можно представлять как поверхности в пространстве координат $xh\theta$. Все они будут заключены в области между плоскостями $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Предыдущий результат показывает, что все эти поверхности проходят через прямую $h = 0, \theta = \frac{1}{2}$. Отсюда мы сделаем тот вывод, что независимо от функции $f(x)$ и значения аргумента x должно быть

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{h=0} = 0.$$

Теперь мы в состоянии перейти к доказательству основной теоремы.

5. Теорема 2. *Всякая функция $f(x)$ (удовлетворяющая условиям, высказанным в п. 2) удовлетворяет уравнению*

$$f'''(x) = 24 \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} f''(x).$$

Для доказательства дифференцируем формулу Лагранжа

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$$

по x :

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x+\theta h) \cdot \left(1 + h \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$$

и по h :

$$f'(x+h) = f'(x+\theta h) + hf''(x+\theta h) \cdot \left(\theta + h \frac{\partial \theta}{\partial h}\right).$$

Находим из этих уравнений величину $hf''(x+\theta h)$ и приравниваем полученные выражения:

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{1 + h \frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{f'(x+h) - f'(x+\theta h)}{\theta + h \frac{\partial \theta}{\partial h}}. \quad (2)$$

Но из формулы Лагранжа

$$f'(x+\theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

поэтому равенство (2) переписывается так:

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{1 + h \frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{hf'(x+h) - f(x+h) + f(x)}{h \left(\theta + h \frac{\partial \theta}{\partial h} \right)}.$$

¹⁾ Это заключение верно только в том случае, когда $f''(x) \neq 0$. См. предыдущую сноску. (Ред.)

Это равенство иначе можно переписать так:

$$\frac{h(1-\theta)f'(x+h) + \theta hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{h} = \\ = \frac{\partial \theta}{\partial x} [f(x+h) - f(x) - hf'(x+h)] + h \frac{\partial \theta}{\partial h} [f'(x+h) - f'(x)].$$

Разделим это равенство на h^2 и перейдем к пределу, полагая $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-\theta)f'(x+h) + \theta hf'(x) - f(x+h) + f(x)}{h^2} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x+h)}{h^2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \theta}{\partial h} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h};$$

но мы видели, что

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right]_{h=0} = 0,$$

поэтому предел правой части равен

$$f''(x) \cdot \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0}. \quad (3)$$

Вычислим предел левой части посредством правила Лопиталья. После трехкратного применения этого правила приходим к равенству:

$$\text{Левая часть} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2} [f'(x) - f'(x+h)] - 6 \frac{\partial \theta}{\partial h} f''(x+h) + (2-3\theta) f'''(x+h)}{6} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2} f''(x+h) + 3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2} f''(x+h) + 3 \frac{\partial \theta}{\partial h} f'''(x+h) - (1-\theta) f'''(x+h) - \frac{\partial^2 \theta}{\partial h^2} f'(x) \right]}{6}.$$

Предел второго члена в силу присутствия множителя h равен нулю; предел первого члена равен

$$- \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} f''(x) + \frac{1}{12} f'''(x). \quad (4)$$

Приравниваем (3) и (4):

$$- \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} f''(x) + \frac{1}{12} f'''(x) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} f''(x).$$

Отсюда окончательно

$$f'''(x) = 24 \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} f''(x). \quad (5)$$

6. Применим теперь формулу (5) для нахождения функций $f(x)$, для которых $\theta(x, h)$ является а) функцией только x ; б) функцией только h .

Теорема 3. Для того чтобы $\theta(x, h)$ зависела только от x , необходимо, чтобы функция $f(x)$ была вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

в этом случае постоянно равно $\frac{1}{2}$.

Действительно, в этом случае

$$\theta(x, h) = \theta(x, 0) = \frac{1}{2}.$$

Уравнение (5) в этом случае запишется так:

$$f'''(x) = 0,$$

отсюда

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Теорема 4. Для того чтобы $\theta(x, h)$ зависела только от h , необходимо, чтобы функция $f(x)$ была вида

$$f(x) = a + bx + ce^{kx}.$$

Действительно, в этом случае

$$24 \left[\frac{\partial \theta}{\partial h} \right]_{h=0} = k = \text{const.}$$

Уравнение (5) принимает вид

$$f'''(x) = kf''(x),$$

откуда

$$f(x) = a + bx + ce^{kx}.$$

Но сформулированные в теоремах 3 и 4 условия являются в то же время достаточными, так как в первом случае $\theta = 0,5$; а во втором случае

$$\theta = \frac{1}{kh} \ln \frac{1}{k} (e^{kh} - 1).$$

Приведенные теоремы показывают, что далеко не всякая функция $\theta(x, h)$ ($0 < \theta < 1$) может быть θ в формуле Лагранжа.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОТСУТСТВУЕТ ОДНА ИЗ ПЕРЕМЕННЫХ

И. С. Градштейн (Москва)

Обычный способ интегрирования дифференциальных уравнений $F(x, y') = 0$, $F(y, y') = 0$, в которых отсутствует одна из переменных, сводится к решению этих уравнений относительно входящего в них переменного или относительно производной. Однако решить эти уравнения относительно входящих в них переменных не всегда возможно. В таком случае общий метод интегрирования таких уравнений сводится к выражению как переменной x (или y), так и производной y' через вспомогательный параметр t . Конкретных способов применения этого метода обычно не указывается. Я хочу здесь указать способ решения одного вида таких дифференциальных уравнений.

Положим, что левая часть дифференциального уравнения $F(x, y') = 0$ представляет собой разность двух однородных функций, т. е. пусть

$$F(x, y') \equiv f(x, y') - g(x, y') = 0, \quad (1)$$

где $f(x, y')$ и $g(x, y')$ — две однородные функции соответственно измерений m и n . Из определения однородных функций следует, что

$$f(uz, vz) = z^m f(u, v), \quad g(uz, vz) = z^n g(u, v). \quad (2)$$

Положим, $x = uz$, $y' = vz$, где u и v — две совершенно произвольные переменные, и постараемся подобрать переменную z так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось при любых значениях u и v , т. е. чтобы равенство

$$f(uz, vz) - g(uz, vz) = 0 \quad (3)$$

представляло собой тождество относительно u и v . Так как функции f и g являются однородными функциями, то равенство (3) можно переписать так:

$$z^m f(u, v) - z^n g(u, v) = 0.$$

Следовательно, равенство (3) станет тождеством, если положить

$$z = \left[\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right]^{\frac{1}{m-n}}. \quad (4)$$

Итак, уравнение (1) удовлетворяется тождественно, если положить [см. равенство (3)]

$$x = u \left[\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad y' = v \left[\frac{g(u, v)}{f(u, v)} \right]^{\frac{1}{m-n}}, \quad (5)$$

где u и v — две совершенно произвольные переменные. Заменяя произвольные переменные u и v произвольными функциями от t : $u(t)$ и $v(t)$, мы выразим x и y' через функции параметра t , удовлетворяющие тождественно уравнению (1), т. е. решим нашу задачу.

Пример. $x^3 + y'^3 - 3axy' = 0$.

Полагая $x = uz$, $y' = vz$ и подставляя эти значения x и y' в данное уравнение, найдем, что $z = \frac{3auv}{u^3 + v^3}$, т. е.

$$x = \frac{3au^2v}{u^3 + v^3}, \quad y' = \frac{3auv^2}{u^3 + v^3}.$$

Положим $u = 1$, $v = t$. Тогда

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y' = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$\begin{aligned} y &= 9a^2 \int \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} t^2 dt = 3a^2 \int \frac{3-2(1+t^3)}{(1+t^3)^2} d(1+t^3) = \\ &= \frac{6a^2}{1+t^3} - \frac{9a^2}{2(1+t^3)^2} + C. \end{aligned}$$

Можно положить

$$u = \sin^{\frac{2}{3}} t, \quad v = \cos^{\frac{2}{3}} t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x &= 3a \sin^{\frac{4}{3}} t \cos^{\frac{2}{3}} t, & y' &= 3a \sin^{\frac{2}{3}} t \cos^{\frac{4}{3}} t, \\ \frac{dx}{dt} &= a \left(4 \sin^{\frac{1}{3}} t \cos^{\frac{5}{3}} t - 2 \sin^{\frac{7}{3}} t \cos^{-\frac{1}{3}} t \right), \\ y &= 6a^2 \int (2 \sin t \cos^3 t - \sin^3 t \cos t) dt = \\ &= -\frac{3}{2} a^2 (2 \cos^4 t + \sin^4 t) + C. \end{aligned}$$

ЦИЛИНДР ШВАРЦА

(К вопросу о вычислении площадей кривых поверхностей)

А. Г. Школьник (Москва)

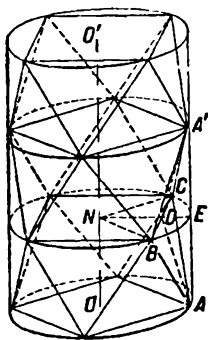
Как известно, в интегральном исчислении при выводе формулы для вычисления площади кривой поверхности мы рассматриваем ее как предел суммы площадей касательных плоскостей, проведенных в точках поверхности, а не пользуемся вписанными многогранниками, как это казалось бы естественным по аналогии с предшествующими выводами (например, длину дуги мы находим как предел периметра произвольным образом вписанной в дугу ломаной линии при неограниченном увеличении числа ее сторон). Причина этого заключается в том, что площадь вписанного в поверхность произвольным образом многогранника при неограниченном возрастании числа его граней (и неограниченном уменьшении их диаметра) может, вообще говоря, не стремиться ни к какому пределу. Примером служит так называемый цилиндр Шварца (Н. А. Schwarz, 1843—1921)¹⁾.

I

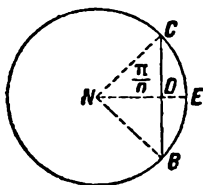
Возьмем часть прямого цилиндра радиуса R и высоты H (фиг. 1) и попытаемся вычислить площадь боковой поверхности (равную $2\pi RH$), рассматривая ее как предел площади боковой поверхности многогранника, который мы впишем в цилиндр нижеследующим образом. Равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, делим его на m частей (на чертеже $m = 3$) и в каждую из получившихся в пересечении $m + 1$ окружностей вписываем правильный n -угольник (на чертеже $n = 4$) таким образом, чтобы вершины каждого многоугольника находились над серединами сторон лежащего под (и над) ним многоугольника (точнее: в плоскости, перпендикулярной стороне многоугольника и делящей ее пополам, так что образующая цилиндра, проходящая через вершину многоугольника, делит пополам дугу, стягивающую сторону лежащего ниже многоугольника).

¹⁾ См. Н. А. Schwarz, Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe, Ges. Math. Abh., т. II, стр. 309—311.

Вершины многоугольников соединяем отрезками с концами лежащих под ними сторон. В результате получаем искомый многогранник, боковые грани которого представляют равные между собой равнобедренные треугольники, основаниями которых служат стороны вписанных n -угольников; всех граней $2mn$ (m поясов по $2n$ треугольников в каждом n основаниями вниз и n основаниями вверх).



Фиг. 1.



Площадь боковой поверхности многогранника обозначим S_{mn} и вычислим ее. Найдем сначала площадь одной какой-либо грани, например, треугольника ABC . Пусть AD — высота этого треугольника. Тогда

$$\text{пл. } ABC = \frac{BC \cdot AD}{2}.$$

Вычислим BC :

$$BC = 2DC = 2NC \sin DNC = 2NC \sin \frac{BNC}{2} = 2R \sin \frac{\pi}{n};$$

AD найдем из прямоугольного треугольника AED :

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2}.$$

$AE = \frac{H}{m}$. Находим DE :

$$DE = NE - ND = R - R \cos \frac{\pi}{n} = R \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) = 2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Таким образом

$$AD = \sqrt{\frac{H^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{m} \sqrt{H^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Теперь находим площадь нашей грани:

$$\text{пл. } ABC = R \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{m} \sqrt{H^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Всю площадь боковой поверхности многогранника S_{mn} получим умножением на $2mn$:

$$S_{mn} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

Будем теперь искать предел найденного выражения при неограниченном возрастании m и n . При этом отрезок DE , как видно из чертежа и из полученного для него выражения, стремится к нулю. Стремится к нулю также BC . Точки поверхности многогранника, следовательно, неограниченно приближаются к поверхности цилиндра. Казалось бы, что при этих условиях и площадь поверхности многогранника должна неограниченно приближаться

к п л о щ а д и поверхности цилиндра. Тем не менее, мы увидим, что это, вообще говоря, не так.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} S_{mn} &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sqrt{H^2 + 4R^2 m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \\ &= 2R \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \sqrt{H^2 + 4R^2 \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{m^2}}}.\end{aligned}$$

При нахождении пределов отношений заменяем бесконечно малые синусы эквивалентными им дугами $\frac{\pi}{n}$ и $\frac{\pi}{2n}$.

Получаем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} S_{mn} = 2R \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{H^2 + 4R^2 \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^4}{\frac{1}{m^2}}}.$$

Окончательно упрощая, получаем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} S_{mn} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{R^2 \pi^4}{4} \cdot \left(\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{m}{n^2}\right)^2}. \quad (1)$$

Таким образом предел S_{mn} будет существовать, если будет существовать $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{m}{n^2}$. Но нетрудно показать, что в общем случае предела величины $a_{mn} = \frac{m}{n^2}$ не существует. Хотя и существуют в отдельности простые предельные переходы по каждому из индексов m и n , но двойного предела здесь нет. Действительно, хотя для какого угодно постоянного m существует предел при $n \rightarrow \infty$ (обозначим его a_m), $a_m = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} = 0$, и затем существует $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 0$, но отсюда еще нельзя заключить, что и двойной предел существует и тоже равен 0, ибо a_{mn} при $n \rightarrow \infty$ не стремится к нулю равномерно относительно m . В самом деле, стоит только положить хотя бы $m = n^2$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ будет иной, будет равен 1. Таким образом не существует двойного предела $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{m}{n^2}$, а следовательно, не существует и предела S_{mn} . Площадь боковой поверхности нашего многогранника при неограниченном возрастании числа его граней (и одновременном неограниченном уменьшении их диаметра) не стремится ни к какому пределу.

II

Рассмотрим теперь подробнее поведение S_{mn} при возрастании m и n . Хотя и не существует, как мы показали, предела S_{mn} при произвольном характере неограниченного возрастания m и n , все же S_{mn} может стремиться к определенным пределам при специальном выборе m и n . Посмотрим, какие здесь могут представиться случаи:

$$1) \lim \frac{m}{n^2} = 0.$$

Этот случай будет иметь место, если m возрастает медленнее чем n^2 ; например, m равно или пропорционально n , $m = kn$. В этом случае, как видно из формулы (1), $\lim S_{mn} = 2\pi RH$. Площадь поверхности многогранника имеет в данном случае пределом площадь поверхности цилиндра.

$$2) \lim \frac{m}{n^2} = c = \text{const.} \quad (c \neq 0).$$

Это будет иметь место, если m растет с той же скоростью, что и n^2 , $m = kn^2$. В этом случае существует конечный предел S_{mn} , но предел этот не равен $2\pi RH$. Например, при $m = n^2$

$$\lim S_{mn} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} R^2 \pi^4}.$$

Площадь поверхности многогранника имеет предел, но предел этот больше площади поверхности цилиндра.

$$3) \lim \frac{m}{n^2} = \infty.$$

Этот случай представится при возрастании m более быстрее чем n^2 , например, при $m = n^3$. В этом случае, очевидно, и $\lim S_{mn} = \infty$.

Площадь поверхности нашего многогранника неограниченно возрастает.

Как все это представить себе геометрически? Для этого проследим изменение угла, положим, ADA' между двумя находящимися одна над другой гранями многогранников ABC и $A'BC$ (см. чертеж). Возьмем половину этого угла ADE . Из прямоугольного треугольника AED

$$\text{tg } ADE = \frac{AE}{ED} = \frac{\frac{H}{m}}{2R \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = \frac{H}{2R} \cdot \frac{\frac{1}{m}}{\left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^2}.$$

Переходим далее к пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \text{tg } ADE &= \frac{H}{2R} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\left(\sin \frac{\pi}{2n}\right)^2} = \frac{H}{2R} \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\frac{\pi^2}{4n^2}} = \\ &= \frac{2H}{R\pi^2} \cdot \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{2H}{R\pi^2} \cdot \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{n^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Итак, величина $\lim \operatorname{tg} ADE$ зависит от $\lim \frac{m}{n^2}$. В общем случае такого предела, как мы знаем, не существует. По отношению же к рассмотренным нами выше случаям положение будет следующее:

1. Если $\lim \frac{m}{n^2} = 0$, то, как видно из (2), $\operatorname{tg} ADE \rightarrow \infty$, и, следовательно, $\angle ADE \rightarrow \frac{\pi}{2}$ и $\angle ADA' \rightarrow \pi$ или 180° . В этом случае находящиеся одна над другой грани многогранника стремятся развернуть образуемый ими двугранный угол и слиться с поверхностью цилиндра. В рассматриваемом случае, как мы видели, пределом площади поверхности многогранника служит площадь поверхности цилиндра.

2. При $\lim \frac{m}{n^2} = c = \text{const.} (c \neq 0)$, $\operatorname{tg} ADE \rightarrow \text{const.} (\neq 0)$. В этом случае углы ADE и ADA' стремятся к некоторой постоянной, отличной от нуля и π . Характер предельного перехода в рассматриваемом случае таков, что грани многогранника стремятся остаться под некоторым постоянным углом друг к другу. Как мы видели выше, в этом случае площадь поверхности многогранника имеет предел, больший площади поверхности цилиндра.

3. В последнем случае, когда $\lim \frac{m}{n^2} = \infty$, $\operatorname{tg} ADE \rightarrow 0$. В этом случае углы ADE и ADA' стремятся к нулю. В стремлении к пределу грани многогранника, бесконечно умаяясь по своей величине, неограниченно приближаются своими плоскостями одна к другой, вместе с тем стремясь стать перпендикулярными к поверхности цилиндра. При таком характере изменения многогранника площадь поверхности его, как было показано выше, неограниченно возрастает.

Проведенное рассмотрение изменения угла между гранями дает наглядное представление о характере деформации поверхности многогранника в процессе стремления ее к пределу, но до достижения ею этого предела. В пределе, однако, собственно ни о каком угле между гранями говорить нельзя, ибо самые грани тогда уже не будут существовать.

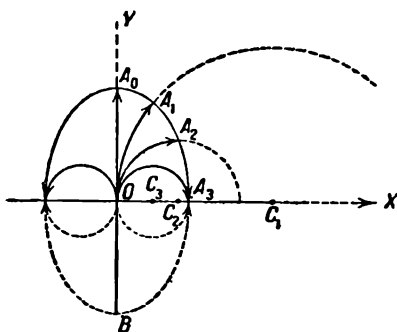
Таков геометрический смысл рассмотренных выше различных, зависящих от характера изменения $\frac{m}{n^2}$, случаев стремления к пределу поверхности многогранника. Тем не менее, несмотря на все существующее различие в характере предельных переходов и различную для различных случаев величину предела площади поверхности многогранника, геометрическим пределом самой поверхности многогранника во всех случаях является поверхность цилиндра, так как все точки поверхности многогранника неограниченно к ней приближаются. Таким образом, несмотря на то, что пределом поверхности нашего многогранника служит поверхность цилиндра, площадь поверхности его имеет (во втором и третьем случаях) предел, отличный от площади поверхности цилиндра. Мы имеем, таким образом, здесь пример того, когда *предел площади поверхности не равен площади предела*.

УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ КОКОНА

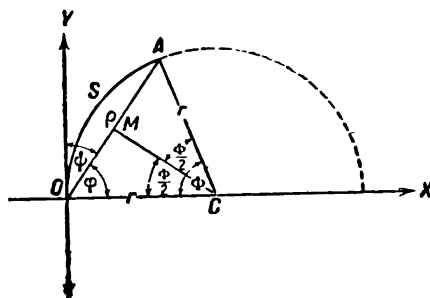
Б. А. Оксенов (Ленинград)

В известный период жизни гусеница (личинка бабочки) свивает кокон (образование из шелковистых нитей). Так поступают, конечно, не все гусеницы, и не все гусеницы свивают правильный кокон, т. е. более или менее правильной и изящной геометрической формы. Но коконы некоторых насекомых вызывают восхищение правильностью своей формы. Красивая форма кокона происходит, несомненно, оттого, что личинка строит его по какому-то определенному закону, вытекающему из условий ее организации. Каков же этот закон?

Представим себе червячка, обладающего гибким и упругим телом, способным изгибаться и выпрямляться наподобие упругой



Фиг. 1.



Фиг. 2.

резиновой трубки или резинового жгута; допустим, для простоты рассуждений, что личинка не выводит своего тела из плоскости бумаги и связана одной половиной своего тела с одной из координатных осей, например, OY (фиг. 1), между тем, другая половина тела может свободно изгибаться (личинка на фигуре изображена стрелкой).

По мере того, как личинка отклоняется от своего первоначального положения OA_0 , она изгибает свое туловище, располагая его по дугам некоторых кривых, и занимает последовательно ряд положений:

$$OA_0, OA_1, OA_2, \dots, OA_n.$$

Крайняя точка ее туловища (голова), обозначаемая на фигуре буквой A , очертит кривую, чрезвычайно похожую на эллипс, но математически от него совершенно отличную.

Чтобы вывести аналитически уравнение этой кривой, вводим одно существенное упрощение: мы допускаем, что туловище личинки (т. е. половина или вообще часть его) всегда располагается по дугам некоторых окружностей, притом таких, что все они имеют центр на оси абсцисс OX и, следовательно, касательны к оси ординат OY в точке O .

Чтобы построить ряд точек кривой, достаточно построить пучок окружностей, касательных к оси OY в точке O , и отрезать равные дуги окружностей:

$$OA_0, OA_1, OA_2, OA_3, \dots \text{ и т. д.}$$

(На фиг. 1 дуге OA_0 соответствует окружность с центром в бесконечности; дуге OA_1 — окружность с центром в C_1 ; дуге OA_2 — окружность с центром в C_2 и т. д.) Геометрическое место конечных точек этих равных дуг и есть искомая кривая.

Перейдем теперь к выводу уравнения кривой в полярных координатах.

Как известно, дуга s связана с углом Φ и радиусом r (фиг. 2) следующим соотношением:

$$s = r\Phi.$$

Из прямоугольных треугольников OMC и AMC находим:

$$\rho = 2r \sin \frac{\Phi}{2}.$$

Исключая r из этих двух уравнений, имеем:

$$\rho = \frac{2s \sin \frac{\Phi}{2}}{\Phi},$$

или

$$\rho = \frac{s \sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}}. \quad (1)$$

Кроме того, очевидно

$$\frac{\Phi}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

а следовательно,

$$\sin \frac{\Phi}{2} = \cos \varphi.$$

Подставив последние значения для $\frac{\Phi}{2}$ и $\sin \frac{\Phi}{2}$ в уравнение (1), получим:

$$\rho = \frac{s \cos \varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}. \quad (2)$$

Это и есть уравнение кривой в полярных координатах (ρ и φ).

Уравнению (2) можно придать другой вид. Положим

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \phi,$$

тогда

$$\rho = \frac{s \sin \phi}{\phi}. \quad (3)$$

Это последнее уравнение (3) проще первого. Нетрудно видеть, что уравнение (3) выражает кривую, отнесенную к другой полярной оси¹⁾.

¹⁾ Т. е. к оси OY .

Рассмотрим частные значения уравнения (2). При $\varphi = 0$ имеем:

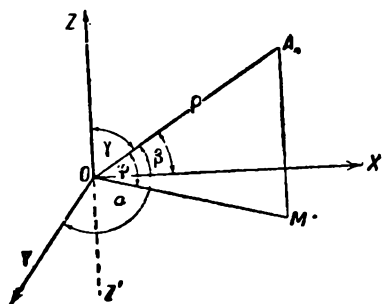
$$\rho = \frac{2s}{\pi} \approx 0,63662 s.$$

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$\rho = s \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos \varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi} \right] = s.$$

Рассмотренную кривую можно назвать линией кокона ¹⁾.

Перейдем теперь к выводу уравнения поверхности кокона. Допустим, что личинка, связанная одной половиной своего тела с неподвижной прямой OZ , получает свободу движений в пространстве для другой половины своего тела и может обозначать головой (точкой A) след своего движения. Тогда она очертит поверхность приблизительно эллипсоидальной формы (собственно «кокон»).



Фиг. 3.

Для вывода уравнения этой поверхности представим себе систему трех взаимно перпендикулярных осей OX , OY и OZ (фиг. 3); и построив пучок окружностей, касающихся к оси $Z'Z$ в точке O , отрезем по точкам A_n равные дуги. Геометрическое место концов всех равных дуг в пространстве будет искомым поверхностью.

Радиус-вектор ρ точки A_n составляет с осями OX , OY и OZ углы α , β и γ , которые связаны соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (4)$$

Пусть, далее, OM —проекция радиуса-вектора ρ на плоскость XOY и φ —угол, составленный радиусом-вектором с проекцией. Очевидно:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad (5)$$

а следовательно,

$$\cos \gamma = \sin \varphi, \text{ или } \cos^2 \gamma = \sin^2 \varphi, \text{ или } \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \varphi. \quad (6)$$

Подставив выражение (6) в уравнение (4), получим:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \varphi. \quad (7)$$

¹⁾ Гусеница, вычерчивающая на плоскости линию кокона, существует в природе. Это — гусеница моли *Incurvaria pectinea*, вырезающая из листьев березы изящные овальные пластинки и строящая из них чехлики, в которых она и живет. Несколько таких гусеничек, найденных мною этой весной, переданы в Энтомологическую лабораторию при ЛГУ профессору Шванвичу, где они и находятся по сие время (в стадии куколок). Б. О.

Из предыдущего мы знаем, что

$$\rho = \frac{s \cos \varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}, \quad \text{или} \quad \rho^2 = \frac{s^2 \cos^2 \varphi}{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2}. \quad (8)$$

Подставив значения из (5) и (7) в уравнение (8), получаем:

$$\rho^2 = \frac{s^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}{\gamma^2}, \quad (9)$$

причем

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Так как

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma,$$

то формуле (9) можно придать более простой вид:

$$\rho^2 = \frac{s^2 \sin^2 \gamma}{\gamma^2},$$

или

$$\rho = \frac{s \sin \gamma}{\gamma}. \quad (10)$$

Впрочем, к этой последней формуле мы могли бы прийти непосредственно из рассмотрения фиг. 3, минуя все предыдущие рассуждения ¹⁾. Таким образом и линия кокона и поверхность кокона при соответственном выборе полярной оси (ось OZ и на фиг. 3) выражаются в полярных и сферических координатах одной и той же в высшей степени простой формулой (10).

Необходимо заметить, что к указанным формулам мы приходим, исходя из предположения, что тело личинки сгибается по дуге окружности (это допущение нами было подчеркнуто). Так как движение тела личинки управляется внутренними силами (сокращением мышечных волокон), т. е. эти силы не приложены к телу извне, то можно полагать, что кривые, по которым располагается упругое тело личинки, строятся по законам упругих тел, но соответствуют ли они в точности дугам окружностей или других, более сложных кривых,— точный ответ на этот вопрос может дать теория упругости. Мы воздерживаемся все же рассматривать живое тело личинки как типичное «упругое тело» механики и полагаем, что формула $\rho = \frac{s \sin \gamma}{\gamma}$ с удовлетворительной точностью выражает на математическом языке один из «архитектурных моментов» в жизни природы — изящную постройку кокона.

¹⁾ Поверхность кокона есть поверхность вращения, т. е. получается вращением плоской кривой $\rho = \frac{s \sin \gamma}{\gamma}$ вокруг оси OZ . Поэтому в уравнение кокона и не входят величины углов α и β . Уравнением (10) поверхность выражена также в сферических координатах (ρ и γ ; третья сферическая координата в уравнение не вошла).

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ¹⁾

Б. И. Сегал (Москва)

§ 1. Введение

В математике часто встречается задача нахождения приближенного значения некоторой неизвестной величины, точное значение которой найти затруднительно или невозможно. При этом важно уметь находить приближенное значение искомой величины так, чтобы было известно, какая погрешность допущена от замены истинной величины приближенной. С другой стороны, важно, чтобы способ нахождения приближенной величины был таков, чтобы можно было достигнуть любой точности, т. е. чтобы погрешность не превосходила заранее данной, сколь угодно малой величины.

Для решения этой задачи чаще всего пользуются бесконечными рядами. Например, известно, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad (1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad (-1 < x \leq 1) \quad (2)$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \quad (3)$$

Здесь бросается в глаза следующая особенность отдельных бесконечных рядов. Ряды (1) и (3) удобны для вычислений, так как члены их быстро убывают, и, следовательно, для получения сравнительно точных значений искомых величин $\sin x$ и e достаточно ограничиться небольшим числом первых членов соответствующего ряда. Этого нельзя сказать относительно ряда (2), особенно если нужно его применить для значений x , близких к единице.

Как частный случай бесконечного ряда можно рассматривать бесконечную десятичную дробь.

Например, имеем:

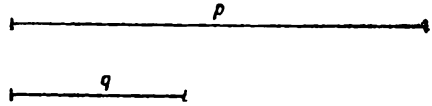
$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 1,7320508\dots, \\ \pi &= 3,1415926\dots, \\ e &= 2,7182818\dots \end{aligned}$$

Последний способ приближенного представления величин весьма удобен, так как, взяв определенное число десятичных знаков, мы сразу можем оценить допускаемую ошибку. Зато мы не можем здесь без производства предварительных вычислений написать любое число десятичных знаков, в то время как в рядах (1), (2) и (3), зная несколько первых членов ряда, мы можем автоматически написать дополнительно любое число членов.

¹⁾ Настоящая статья представляет собою изложение лекции, прочитанной 18 апреля 1935 г. для учащихся выпускных классов средней школы и рабфаков, участников Московской математической олимпиады.

Важным и интересным способом приближенного представления величин являются так называемые непрерывные или цепные дроби.

Из геометрии известно, что для нахождения отношения двух отрезков необходимо найти их общую меру. Непрерывная дробь дает не только окончательный результат процесса нахождения общей меры двух отрезков, но и все промежуточные стадии этого процесса.



Фиг. 1.

Пусть нам даны два отрезка p и q (фиг. 1). Для нахождения

$\frac{p}{q}$ мы откладываем отрезок q на отрезке p . Допустим, что на p можно отрезок q отложить a раз, после чего на отрезке p остается еще отрезок q_1 , меньший отрезка q . Тогда можем написать:

$$p = aq + q_1,$$

или

$$\frac{p}{q} = a + \frac{q_1}{q} = a + \frac{1}{\frac{q}{q_1}}. \quad (4)$$

После этого мы откладываем отрезок q_1 на отрезке q . Пусть q_1 можно отложить a_1 раз и на q остается после этого еще отрезок q_2 , меньший q_1 . Тогда имеем:

$$q = a_1 q_1 + q_2,$$

откуда

$$\frac{q}{q_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}}.$$

Подставив это значение в (4), находим:

$$\frac{p}{q} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{q_2}{q_1}}}.$$

Мы можем аналогично продолжать этот процесс и дальше. Если при этом мы дойдем до такого отрезка q_n , который в предыдущем отрезке q_{n-1} отложится ровно a_n раз без остатка, то мы получим:

$$\frac{p}{q} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}.$$

Если же отрезки p и q не имеют общей меры, т. е. p и q несоизмеримы, то наш процесс продолжится бесконечно и мы получим:

$$\frac{p}{q} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

В первом случае мы получаем конечную непрерывную дробь, во втором случае — бесконечную непрерывную дробь.

Если нам нужно выразить отношение двух отрезков p и q не точно, а приближенно, то мы можем оборвать процесс последовательного деления, не дойдя до конца этого процесса. Так, если бы мы оборвали процесс после первого деления, отбросив остаток q_1 , то мы приближенно получили бы:

$$\frac{p}{q} = a;$$

если бы мы оборвали процесс после второго деления, пренебрегая остатком q_2 , то получили бы приближенно:

$$\frac{p}{q} = a + \frac{1}{a_1}$$

и т. д. Таким образом представление отношения двух отрезков с помощью непрерывной дроби дает нам возможность выразить это отношение с той степенью точности, которая соответствует данному числу проведенных последовательных отложений при отыскании общей меры отрезков. Ниже мы увидим, что такое приближенное представление является в некотором смысле наиболее выгодным.

В дальнейшем мы ограничиваемся рассмотрением так называемых правильных непрерывных дробей, т. е. таких дробей, у которых все числители отдельных звеньев непрерывной дроби равны единице.

§ 2. Конечные непрерывные дроби

Изложенный способ представления отношения двух отрезков в виде непрерывной дроби дает нам возможность получить разложение в непрерывную дробь любого рационального числа x . При этом мы обнаружим, что рациональное число разлагается в конечную непрерывную дробь и, наоборот, конечная непрерывная дробь представляет рациональное число.

Действительно, если x — рациональное число, то его можно представить в виде:

$$x = \frac{A}{B},$$

где A и B — целые числа. Для представления x в виде непрерывной дроби мы пользуемся алгоритмом Эвклида нахождения общего наибольшего делителя чисел A и B подобно тому, как в случае отношения отрезков мы пользовались методом отыскания общей меры этих отрезков. В результате последовательного деления мы получаем ряд равенств:

$$\begin{aligned} A &= aB + B_1, & 0 \leq B_1 < B, \\ B &= a_1 B_1 + B_2, & 0 \leq B_2 < B_1, \\ B_1 &= a_2 B_2 + B_3, & 0 \leq B_3 < B_2, \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ B_{n-1} &= a_n B_n + B_{n+1}, & 0 \leq B_{n+1} < B_n. \end{aligned}$$

Остатки B_1, B_2, \dots представляют собою целые числа, причем $B > B_1 > B_2 > \dots$

Поэтому мы в результате последовательного деления дойдем до некоторого остатка B_{n+1} , который будет равен нулю. Тогда для числа x мы имеем следующее разложение в конечную непрерывную дробь:

$$x = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

Обратно, если дана конечная непрерывная дробь, то, пользуясь известными правилами преобразования алгебраической дроби, убеждаемся в том, что эта дробь представляет рациональное число.

Примеры. 1. Для разложения числа $x = \frac{1151}{541}$ в непрерывную дробь, применяем алгоритм Эвклида. Имеем:

$$\begin{array}{r} 1151 \overline{) 541} \quad 2 \\ \underline{1082} \\ 69 \overline{) 541} \quad 7 \\ \underline{483} \\ 69 \overline{) 58} \quad 1 \\ \underline{58} \\ 11 \overline{) 58} \quad 5 \\ \underline{55} \\ 3 \overline{) 11} \quad 3 \\ \underline{9} \\ 2 \overline{) 3} \quad 1 \\ \underline{2} \\ 1 \overline{) 2} \quad 2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$$

Поэтому

$$x = 2 + \frac{1}{7} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.$$

2. Пусть требуется найти значение непрерывной дроби

$$x = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5}.$$

Вычисления производим начиная с последнего звена непрерывной дроби. Имеем:

$$1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}; \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = 2 + \frac{1}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6};$$

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = 3 + \frac{1}{\frac{17}{6}} = 3 + \frac{6}{17} = \frac{57}{17}.$$

Эти вычисления удобнее всего расположить в виде следующей схемы:

$$\begin{array}{r} 1 \ 5 \ 1 \ 2 \ 3 \\ \hline 1 \ 1 \ 5 \ 6 \ 17 \ 57 \end{array}.$$

Здесь мы над горизонтальной чертой выписываем знаменатели отдельных звеньев непрерывной дроби в обратном порядке. Во второй строке, слева от вертикальной черты, пишем всегда единицу, справа от вертикальной черты всегда переносим первое число из ряда знаменателей, написанных над горизонтальной чертой. После этого легко найти каждое из чисел второй строки. Для того чтобы найти число 6, мы умножаем предшествующее число 5 на число, стоящее над искомым числом, т. е. на 1, и к произведению прибавляем 1, т. е. число, предшествующее числу 5. Точно так же число 17 находится умножением 6 на 2 и прибавлением числа 5, число 57 находится умножением 17 на 3 и прибавлением числа 6. Последние два числа второй строки представляют собою знаменатель и числитель искомой непрерывной дроби.

3. Найти значение непрерывной дроби

$$x = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}.$$

Вычисления производим так, как указано в предыдущем примере:

$$\begin{array}{r} 1 \ 4 \ 1 \ 2 \ 3 \ 2 \\ \hline 1 \ 1 \ 4 \ 5 \ 14 \ 47 \ 108 \end{array}.$$

Таким образом для искомого значения имеем:

$$x = \frac{108}{47}.$$

§ 3. Бесконечные непрерывные дроби

До сих пор мы при введении непрерывной дроби исходили из отношения. Но можно получить разложение в непрерывную дробь иррационального числа, которое не представляется в виде отношения. Пусть x — любое иррациональное число. Наибольшее целое число, содержащееся в x , мы будем обозначать через $[x]$ и называть целой частью числа x . Если

$$[x] = a,$$

то

$$x - a < 1$$

и

$$x = a + \frac{1}{x_1}, \quad (5)$$

где x_1 — некоторое число, большее единицы. Пусть далее

$$[x_1] = a_1;$$

тогда

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad (6)$$

где $x_2 > 1$. Точно так же

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad (7)$$

где a_2 — целая часть числа x_2 , и т. д. Вообще имеем:

$$x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}, \quad (8)$$

где

$$a_{n-1} = [x_{n-1}], \quad x_n > 1.$$

Если мы в равенстве (5) заменим x_1 его значением из (6), во вновь полученном равенстве заменим x_2 его значением из (7), затем будем заменять x_3, x_4, \dots соответствующими их значениями, то получим разложение x в непрерывную дробь:

$$x = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

Иррациональное число представляется в виде бесконечной непрерывной дроби. В самом деле, если мы допустим, что для иррационального числа получено разложение в конечную непрерывную дробь, то по доказанному выше эта конечная непрерывная дробь равна рациональному числу. Мы таким образом приходим к противоречию. Ниже (§ 6) мы докажем, что бесконечная непрерывная дробь действительно может быть рассматриваема как значение соответствующего иррационального числа. Это следует понимать в том смысле, что, обрывая бесконечную непрерывную дробь на каком-нибудь звене, мы получаем приближенное значение иррационального числа в виде конечной непрерывной дроби, причем погрешность может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно большое число звеньев непрерывной дроби.

Примеры. 1. Пусть требуется разложить в непрерывную дробь иррациональное число $\sqrt{2}$. Имеем:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

откуда

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt{2} - 1, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

Таким образом

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Далее

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_2}; \quad \frac{1}{x_2} = \sqrt{2} - 1; \quad x_2 = \sqrt{2} + 1$$

и

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}.$$

Мы видим, что для x_3, x_4, \dots мы все время будем получать одно и то же значение $\sqrt{2} + 1$. Поэтому

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

2. Найти значение бесконечной непрерывной дроби

$$x = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

мы можем следующим образом. Так как

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

то

$$x_2 - x - 1 = 0.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Здесь мы должны взять верхний знак, так как x положительно. Поэтому

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

§ 4. Обозначения и определения

В дальнейшем мы непрерывную дробь

$$x = a + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots$$

будем сокращенно писать так:

$$x = [a, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]. \quad (9)$$

Из равенств (5), (6), (7) и (8) мы непосредственно получаем:

$$x = [a, x_1] = [a, a_1, x_2] = \dots = [a, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_{n-1}]. \quad (10)$$

Числа a, a_1, a_2, \dots мы будем называть *неполными частными*, а числа x, x_1, x_2, \dots — *полными частными* непрерывной дроби. Конечная непрерывная дробь, составленная с помощью n первых неполных частных, называется *n -й подходящей дробью*. Так, подходящими дробями для непрерывной дроби (9) будут:

$[a]$ — первая подходящая дробь,
 $[a, a_1]$ — вторая подходящая дробь,
 $[a, a_1, a_2]$ — третья подходящая дробь,
 \dots
 $[a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ — n -я подходящая дробь.

Из (10) следует, что для получения n -й подходящей дроби для данной величины x достаточно в выражении для x через первые $n-1$ неполных частных и n -е полное частное заменить n -е полное частное x_{n-1} n -м неполным частным a_{n-1} .

Заметим еще, что одну и ту же конечную непрерывную дробь мы можем представить с помощью четного или нечетного числа неполных частных. В самом деле,

$$[a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1] = [a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1].$$

Мы таким образом имеем две тождественно равные непрерывные дроби, причем одна из них составлена из четного числа неполных частных, а другая из нечетного числа неполных частных.

§ 5. Основные соотношения.

Мы теперь покажем, что данное число можно выразить через n -е полное частное в виде так называемого дробнолинейного выражения:

$$x = \frac{P_{n-1}x_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}x_{n-1} + Q_{n-2}}, \quad (11)$$

где коэффициенты P_{n-2} , P_{n-1} , Q_{n-2} , Q_{n-1} — целые числа. Для x_1 мы получаем наше утверждение непосредственно из (5):

$$x = \frac{ax_1 + 1}{x_1} = \frac{P_1x_1 + P_0}{Q_1x_1 + Q_0}. \quad (12)$$

Здесь

$$P_0 = 1, \quad P_1 = a, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1. \quad (13)$$

Для x_2 мы докажем наше утверждение, если в (12) подставим значение x_1 из (6). После простых преобразований найдем:

$$x = \frac{(aa_1 + 1)x_2 + a}{a_1x_2 + 1} = \frac{P_2x_2 + P_1}{Q_2x_2 + Q_1},$$

где P_1 , Q_1 имеют значения (13), а P_2 , Q_2 опять имеют целые значения $aa_1 + 1$ и a_1 .

Так как наше утверждение справедливо для x_1 и x_2 , то для доказательства его в общем случае мы можем воспользоваться методом полной индукции. Предположим, что имеет место равенство (11). Докажем, что в этом случае будет иметь место аналогичное равенство для x_n . Действительно, подставив в (11) значение x_{n-1} из (8), мы получим после простых преобразований:

$$x = \frac{(P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2})x_n + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2})x_n + Q_{n-1}}.$$

Обозначим

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}, \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}. \quad (14)$$

Заметив, что P_n и Q_n — целые числа, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Из равенств (11) и (14) мы легко получаем, что n -я подходящая дробь числа x равна $\frac{P_n}{Q_n}$. В самом деле, для получения n -й подходящей дроби нужно согласно § 4 в правой части (11) заменить полное частное x_{n-1} неполным частным a_n .

Равенства (13) дают значения подходящих дробей:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a}{1}. \quad (15)$$

Первую из этих дробей мы будем называть нулевой подходящей дробью. С помощью формул (14) мы можем вычислить числитель и знаменатель любой подходящей дроби, если известны числители и знаменатели двух предшествующих ей подходящих дробей. Но так как первые две подходящие дроби (15) нам всегда известны, то мы можем пользоваться формулами (14) для последовательного вычисления подходящих дробей. Эти вычисления удобно производить по следующей схеме:

| | a | a_1 | a_2 | a_3 | ... |
|-----------|-----------|----------------------|----------------------|-------|-----|
| $P_0 = 1$ | $P_1 = a$ | $P_2 = P_1a_1 + P_0$ | $P_3 = P_2a_2 + P_1$ | ... | ... |
| $Q_0 = 0$ | $Q_1 = 1$ | $Q_2 = Q_1a_1 + Q_0$ | $Q_3 = Q_2a_2 + Q_1$ | ... | ... |

Пример. Вычислить все подходящие дроби для числа

$$x = [2, 7, 1, 5, 3, 1, 2].$$

Схема вычисления подходящих дробей представляется в виде:

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|------|
| | 2 | 7 | 1 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 15 | 17 | 100 | 317 | 417 | 1151 |
| 0 | 1 | 7 | 8 | 47 | 149 | 196 | 541 |

Для вычисления подходящих дробей мы можем также пользоваться способом, указанным в § 2, примеры 2 и 3. Но тот способ удобен лишь в том случае, если требуется вычислить лишь одну какую-нибудь подходящую дробь.

§ 6. Свойства подходящих дробей.

Из формул (11) и (14) можно вывести ряд свойств подходящих дробей.

Свойство 1. Числитель и знаменатель n -й подходящей дроби по мере увеличения n возрастают.

Это свойство непосредственно вытекает из формул (14).

Свойство 2. Для числителей и знаменателей двух соседних подходящих дробей $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P_n}{Q_n}$ имеет место формула:

$$P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} = (-1)^{n-1}. \quad (16)$$

Доказательство. Умножив первое из равенств (14) на $-Q_{n-1}$, второе из этих равенств на P_{n-1} и сложив, получим:

$$\begin{aligned} P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} &= P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1} = \\ &= -(P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}). \end{aligned}$$

Но

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = 1 \cdot 1 - a \cdot 0 = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_1 Q_2 - P_2 Q_1 &= -1, \\ P_2 Q_3 - P_3 Q_2 &= 1, \end{aligned}$$

Вообще

$$\dots\dots\dots P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

Свойство 3. Каждая подходящая дробь несократима.

Доказательство. Действительно, если бы P_n и Q_n имели общего множителя, то он был бы делителем левой части равенства (16), а это невозможно, так как правая часть равна ± 1 .

Свойство 4. Разность между двумя соседними подходящими дробями по абсолютной величине равна единице, деленной на произведение знаменателей этих подходящих дробей.

Доказательство. Из равенства (16) мы делением обеих частей на $Q_{n-1} Q_n$ получаем:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}. \quad (17)$$

Свойство 5. Данное количество x всегда заключено между двумя соседними подходящими дробями, и каждая подходящая дробь ближе к x , чем предшествующая.

Доказательство. По формуле (11) мы имеем:

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}};$$

следовательно,

$$(Q_n x - P_n) x_n = P_{n-1} - Q_{n-1} x$$

или

$$\left(x - \frac{P_n}{Q_n}\right) Q_n x_n = \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x\right) Q_{n-1},$$

откуда

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} x_n = \frac{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - x}{x - \frac{P_n}{Q_n}}.$$

Так как левая часть этого равенства положительна, то числитель и знаменатель правой части одного и того же знака, и мы получаем первое утверждение. С другой стороны, так как левая

часть последнего равенства больше единицы, то знаменатель правой части меньше числителя и мы получаем второе утверждение.

Теорема приближения. *Подходящая дробь может быть принята за приближенное значение данного количества x , причем допускаемая погрешность меньше, чем единица, деленная на произведение знаменателей этой подходящей дроби и следующей за ней.*

Эта теорема получается непосредственно из свойства 5 и равенства (17). Мы ее можем кратко записать в виде неравенства:

$$\left| x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} \quad (18)$$

или в виде равенства:

$$x = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{\alpha}{Q_{n-1} Q_n}, \quad \text{где } |\alpha| < 1. \quad (19)$$

Так как по свойству 1

$$Q_{n-1} < Q_n,$$

то из (18) получаем:

$$\left| x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \frac{1}{Q_{n-1}^2} \quad (20)$$

или

$$x = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{\alpha_1}{Q_{n-1}^2}, \quad \text{где } |\alpha_1| < 1. \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21) выражают теорему приближения в следующей несколько менее точной форме.

Теорема. *Подходящая дробь может быть принята за приближенное значение данного количества x , причем допускаемая погрешность меньше, чем единица, деленная на квадрат знаменателя этой подходящей дроби.*

По свойству 1 знаменатель n -й подходящей дроби может быть сделан сколь угодно большим. Поэтому мы можем с помощью подходящих дробей приблизиться к количеству x с какой-угодно большой точностью. Погрешность, получаемую при таком приближении, мы всегда можем легко определить. Таким образом приближение с помощью подходящих дробей удовлетворяет тем двум требованиям, о которых мы упомянули в § 1. С другой стороны, по мере увеличения номера подходящей дроби погрешность быстро убывает, так как она не превосходит величины, обратно пропорциональной квадрату знаменателя подходящей дроби. Следовательно, приближение с помощью дробей имеет преимущество, которое мы выше отмечали для рядов (1) и (3).

Мы теперь докажем, что приближение к x с помощью подходящих дробей в некотором отношении есть наивыгоднейшее.

Теорема. *Подходящая дробь ближе к числу x , чем всякая другая дробь, у которой знаменатель меньше знаменателя подходящей дроби.*

Доказательство. Возьмем $(n-1)$ -ю и n -ю подходящие дроби и допустим для определенности, что

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n}. \quad (22)$$

Пусть дана некоторая несократимая дробь $\frac{P}{Q}$, которая ближе к x , чем каждая из подходящих дробей (22). Тогда по свойству 5

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P}{Q} < \frac{P_n}{Q_n}. \quad (23)$$

Согласно свойству 4 находим:

$$\frac{P}{Q} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{1}{Q_{n-1} Q_n},$$

откуда

$$(P Q_{n-1} - P_{n-1} Q) < \frac{Q}{Q_n}.$$

Левая часть этого неравенства, представляющая собой целое число, не может быть равна нулю, так как дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ и $\frac{P}{Q}$ не равны друг другу. Поэтому $Q > Q_n$. С другой стороны, $Q_n > Q_{n-1}$, следовательно,

$$Q > Q_n > Q_{n-1},$$

откуда и следует доказываемая теорема.

Смысл только что доказанной теоремы заключается в следующем. Из двух дробей мы можем считать более простою ту, у которой знаменатель меньше. Можно поставить вопрос, нельзя ли приблизиться к данному числу дробями более простыми, чем подходящие дроби, и притом так, чтобы точность приближения при этом не снижалась. Доказанная теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос, указывая тем самым, что приближение с помощью подходящих дробей является в этом смысле наиболее выгодным.

На основании изложенной теории мы можем себе представить поведение подходящих дробей относительно данного иррационального числа x . Именно, все подходящие дроби с нечетными номерами n меньше соответствующей величины x и по мере увеличения n они увеличиваются и принимают значения, неопределенно приближающиеся к x . Все подходящие дроби с четными номерами n больше числа x , и по мере увеличения n они уменьшаются и принимают значения, неопределенно приближающиеся к x . В этом смысле мы и принимаем бесконечную непрерывную дробь равной данному иррациональному числу x .

Геометрически мы можем приближение подходящих дробей к числу x представить следующим образом.

В прямоугольной системе координат XOY (фиг. 2) проводим прямую, параллельную оси X и отстоящую от этой оси на расстоянии x . На оси X мы откладываем на одинаковых расстояниях друг от друга номера подходящих дробей и через полученные точки деления проводим прямые, параллельные оси Y . На каждой из этих прямых откладываем отрезок длиной, равной соответствующей подходящей дроби. После этого мы соединяем отдельно

концы отрезков с нечетными номерами и отрезков с четными номерами ломаными линиями. При этом каждая из ломаных линий будет неопределенно приближаться к прямой x .

§ 7. Некоторые примеры непрерывных дробей

Нетрудно получить разложение в непрерывную дробь для числа $\sqrt{5}$ аналогично тому, как мы получили непрерывную дробь для $\sqrt{2}$ (§ 3, пример 1).

Имеем:

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4 \dots].$$

Найдем несколько первых подходящих дробей:

| | | | | | | | |
|---|--|---|---|----|-----|-----|-----|
| | | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | ... |
| 1 | | 2 | 9 | 38 | 161 | 682 | ... |
| 0 | | 1 | 4 | 17 | 72 | 305 | ... |

Пятая подходящая дробь $\frac{682}{305}$ дает уже достаточно точное значение для $\sqrt{5}$. Так как знаменатель шестой подходящей дроби равен 1292, то дробь $\frac{682}{305}$ может быть принята за приближенное значение $\sqrt{5}$, причем погрешность будет меньше чем $\frac{1}{394\,060}$.

Обращает на себя внимание то, что неполные частные при разложении в непрерывную дробь чисел $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (см. § 3, при-

меры 1 и 2) и $\sqrt{5}$ составляются по весьма простому закону, заключающемуся в том, что одни

и те же неполные частные периодически повторяются. Это весьма важное обстоятельство значительно облегчает разложение в непрерывную дробь, так как достаточно вычислить несколько первых неполных частных, чтобы иметь возможность автоматически написать какое угодно число их. Ниже мы специально разберем вопрос, для каких именно иррациональных чисел мы получаем разложение в непрерывную дробь, обладающее этим свойством периодичности.

Для числа

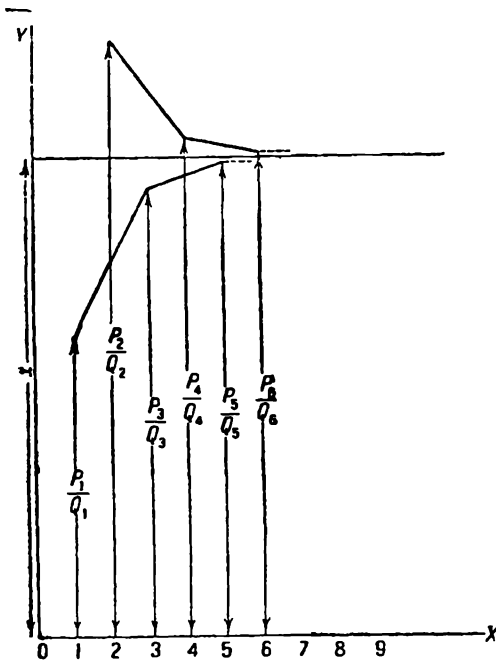
$$\pi = 3,14159265358 \dots$$

получаем следующее разложение в непрерывную дробь:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots].$$

Находим подходящие дроби:

| | | | | | | | |
|---|--|---|----|-----|-----|-----|-----|
| | | 3 | 7 | 15 | 1 | 292 | ... |
| 1 | | 3 | 22 | 333 | 355 | ... | |
| 0 | | 1 | 7 | 106 | 113 | ... | |



Фиг. 2.

Подходящая дробь $\frac{22}{7}$ была известна еще Архимеду (III в. до нашей эры).

Следующие подходящие дроби $\frac{333}{106}$ и $\frac{355}{113}$ были известны в Европе как приближенные значения для π уже в XVI в.

Интересно отметить, что японский автор Хаяши утверждает, что японским математикам в середине XVIII в. была известна дробь

$$\frac{428\ 224\ 593\ 349\ 304}{136\ 308\ 121\ 570\ 117}$$

как приближенное значение π . Какова точность этого значения π , видно из того, что эта дробь представляет собой 27-ю подходящую дробь разложения π в непрерывную дробь.

Закон, по которому составляются неполные частные разложения π в непрерывную дробь, не известен. Английский математик Валлис (XVII в.) вычислил 34 неполных частных для π и нашел:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, \dots].$$

Для основания натуральных логарифмов e закон образования неполных частных найден Эйлером (XVIII в.), именно:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, \dots].$$

На одно практическое применение непрерывных дробей указал Гюйгенс в XVII в. Именно, пусть требуется построить систему двух зубчатых колес с таким расчетом, чтобы время полного оборота одного из них относилось ко времени полного оборота другого, как $a : b$, где a и b — целые числа. Тогда нужно на одном колесе сделать a зубцов на другом b зубцов. Если a и b — большие числа, то практически выполнить это не представляется возможным. Но мы весьма выгодно можем заменить числа a и b меньшими числами. С этой целью нужно отношение $a : b$ разложить в непрерывную дробь и вместо чисел a и b взять числитель и знаменатель одной из подходящих дробей.

§ 8. Приближение с помощью рациональных дробей

Изложенная выше теория непрерывных дробей обнаруживает один принципиально важный и замечательный факт. Именно, мы убедились в том, что каково бы ни было иррациональное число x , существуют рациональные несократимые дроби $\frac{a}{q}$, которые дают приближенное значение x с точностью до $\frac{1}{q^2}$. Этот факт замечателен потому, что непосредственное рассмотрение приближения к иррациональному числу с помощью рациональной дроби $\frac{a}{q}$ даст нам возможность сделать заключение лишь о том, что погрешность, допускаемая при таком приближении, менее, чем $\frac{1}{2q}$. Этим последним заключением мы, например, всегда пользуемся при приближенном представлении иррационального числа с помощью десятичной дроби.

Нужно сказать, что если требуется приблизиться к иррациональному числу с помощью рациональной дроби, имеющей данный знаменатель q , то более точного заключения относительно погреш-

ности сделать в общем случае нельзя. Но если в качестве приближенного значения для x искать рациональную дробь, у которой знаменателем может быть любое число из ряда целых чисел

$$1, 2, 3, \dots, t,$$

где t — некоторое целое число, то погрешность при таком приближении всегда может быть сделана менее, чем $\frac{1}{q^2}$, где q — знаменатель дроби, взятой в качестве приближенного значения данного иррационального числа. В самом деле, для этого нужно взять одну из подходящих дробей $\frac{a}{q}$, у которой знаменатель $q < t$.

Ввиду важности отмеченного факта мы приведем для него еще одно доказательство, которое не основывается на теории непрерывных дробей. При доказательстве мы будем пользоваться так называемым *принципом Дирихле*:

Если среди $n - 1$ ящиков распределить n предметов, то в одном из этих ящиков наверное окажется по меньшей мере 2 предмета.

Теорема, которую мы предполагаем доказать, может быть формулирована следующим образом.

Теорема. Для данного иррационального числа x можно найти дробь $\frac{a}{q}$, где $q < t$, такую, что

$$\left| x - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{qt} < \frac{1}{q^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд чисел:

$$x, 2x, 3x, \dots, tx.$$

Пусть m_1, m_2, \dots, m_t — соответственно их целые части. Тогда каждая из разностей

$$x - m_1, 2x - m_2, 3x - m_3, \dots, tx - m_t$$

меньше единицы. Но среди произведений

$$t(x - m_1), t(2x - m_2), t(3x - m_3), \dots, t(tx - m_t) \quad (24)$$

некоторые могут быть больше, а некоторые меньше единицы. Рассмотрим сперва случай, когда одно из этих произведений меньше единицы, например, пусть

$$t(kx - m_k) < 1.$$

Тогда имеем:

$$kx - m_k < \frac{1}{t},$$

откуда

$$x - \frac{m_k}{k} < \frac{1}{kt}.$$

Таким образом в этом случае теорема доказана, так как мы можем взять

$$\frac{a}{q} = \frac{m_k}{k}.$$

Пусть среди рассматриваемых произведений (24) все больше единицы. Рассмотрим их целые части; каждое из них равно одному из следующих чисел

$$1, 2, 3, \dots, t-1.$$

Но всех произведений (24) мы имеем t . Поэтому по принципу Дирихле по меньшей мере две из целых частей этих произведений равны между собой; пусть

$$\begin{aligned} t(kx - m_k) &= E + \alpha_1, \\ t(lx - m_l) &= E + \alpha_2, \end{aligned}$$

где α_1 и α_2 меньше единицы. Вычитая, получим:

$$t[(k-l)x - (m_k - m_l)] = \alpha_3,$$

где $|\alpha_3| < 1$. Отсюда находим:

$$x - \frac{m_k - m_l}{k - l} = \frac{\alpha_3}{(k-l)t}.$$

Следовательно, теорема доказана и в этом случае, так как мы можем взять $\frac{a}{q} = \frac{m_k - m_l}{k - l}$.

За последнее время многие выдающиеся математики занимаются различными обобщениями этой важной теоремы¹⁾. Мы ограничимся кратким изложением замечательного результата, полученного в этом направлении академиком И. М. Виноградовым в 1935 г. Этот результат касается приближения к иррациональному числу x с помощью дробей вида $\frac{a}{q^n}$, т. е. с помощью дробей, у которых знаменатель есть точная n -я степень. Он может быть формулирован следующим образом. Если в качестве приближенного значения для x искать рациональную дробь, у которой знаменатель есть одно из чисел ряда

$$1^n, 2^n, 3^n, \dots, t^n,$$

где t — некоторое целое число, то погрешность при таком приближении может быть сделана менее, чем $\frac{C}{q^n n^{\epsilon}}$, где C — постоянное число, ϵ — сколь угодно малое положительное число, а q^n — знаменатель дроби, взятой в качестве приближенного значения для x .

В частности, для случая, когда при разложении x в непрерывную дробь все неполные частные ограничены, И. М. Виноградов получил более точную оценку для этой погрешности: $\frac{C}{q^n + \frac{1}{n^{1+\epsilon}}}$.

¹⁾ См. доклад проф. А. Я. Хинчина «Диофантовы приближения». Труды Всерос. съезда математиков 1927 г. ГИЗ, 1928 г., стр. 131.

§ 9. Приложение непрерывных дробей к решению неопределенных уравнений первой степени

Пусть дано неопределенное уравнение:

$$ax - by = 1, \quad (25)$$

где a и b — положительные целые числа.

Это уравнение имеет целые решения только тогда, когда a и b взаимно простые. Разложим дробь $\frac{a}{b}$ в непрерывную дробь с четным числом неполных частных (см. § 4, конец). Пусть $\frac{p}{q}$ — предпоследняя подходящая дробь.

Тогда (§ 6, свойство 2) будем иметь:

$$bp - aq = -1$$

или

$$aq - bp = 1. \quad (26)$$

Отсюда видим, что $x = q$, $y = p$ будет решением данного уравнения (25). Вычитая из (25) равенство (26), найдем:

$$a(x - q) - b(y - p) = 0,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{y - p}{x - q}.$$

Но так как дробь $\frac{a}{b}$ несократима, то из последнего равенства следует:

$$\begin{aligned} y - p &= ta, & y &= p + ta, \\ x - q &= tb, & x &= q + tb, \end{aligned}$$

где t — любое целое число — положительное, отрицательное или нуль. Мы таким образом получаем все решения уравнения (25) в форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= q + tb, \\ y &= p + ta, \end{aligned} \right\} t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Мы предполагали a и b положительными. Если мы имеем другие знаки для a и b , то и для решений p и q получаем другие знаки. Предлагаем читателю проверить, что если вместо a имеем $-a$, то вместо q нужно взять $-q$; если вместо b имеем $-b$, то нужно вместо p взять $-p$.

Если мы имеем более общее уравнение

$$ax - by = c,$$

где a, b и c не имеют общих множителей, то решения этого уравнения получаются путем умножения решений (27) уравнения (25) на c .

Пример. Для уравнения $13x - 5y = 1$ получаем решения $x = 2 + 5t$, $y = 5 + 13t$, а для уравнения $13x - 5y = 3$ получаем решения $x = 6 + 15t$, $y = 15 + 39t$.

§ 10. Вычисление корней алгебраических уравнений с помощью непрерывных дробей

Пусть имеем алгебраическое уравнение n -й степени:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0. \quad (28)$$

Мы будем предполагать, что нам известен способ определения двух последовательных целых чисел, между которыми лежит один или несколько корней данного алгебраического уравнения. В курсах алгебры такие способы излагаются.

Пусть между a и $a + 1$, где a — целое число, лежит корень уравнения (28). Тогда полагаем

$$x = a + \frac{1}{x_1} \quad (29)$$

и подставляем в данное уравнение. Получаем после элементарных преобразований новое уравнение:

$$B_0 x_1^n + B_1 x_1^{n-1} + \dots + B_n = 0. \quad (30)$$

Из (29) видно, что когда x_1 изменяется от 1 до ∞ , x изменяется от a до $a + 1$. Поэтому уравнение (30) имеет столько корней, больших единицы, сколько данное уравнение имеет их между a и $a + 1$. Пусть один из этих корней x_1 лежит между двумя последовательными числами a_1 и $a_1 + 1$. Полагаем

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

и приходим к новому уравнению:

$$C_0 x_2^n + C_1 x_2^{n-1} + \dots + C_n = 0.$$

Продолжая аналогично дальше, мы получаем приближенное значение для корня x в виде непрерывной дроби:

$$x = [a, a_1, a_2, \dots].$$

§ 11. Периодические непрерывные дроби

Мы сейчас будем рассматривать непрерывные дроби, в которых группа неполных частных периодически повторяется, например дробь

$$[a, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a, a_1, a_2, \dots],$$

или

$$[a, a_1, \dots, a_{h-1}, a_h, \dots, a_{h+k-1}, a_h, \dots, a_{h+k-1}, \dots].$$

В этом случае непрерывная дробь называется периодической, причем ряд неполных частных

$$a, a_1, \dots, a_{k-1}$$

или

$$a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+k-1},$$

который периодически повторяется, называется периодом. Если период начинается с первого неполного частного, то дробь назы-

вается чисто периодической, если же до первого периода имеется несколько неполных частных, не входящих в период, то дробь называется смешанной периодической. При обозначении периодической дроби мы будем период заключать в круглые скобки вместо того, чтобы писать его несколько раз.

Мы сейчас покажем, что периодические непрерывные дроби тесно связаны с так называемыми квадратичными иррациональностями.

Квадратичной иррациональностью называется иррациональное число, которое является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Теорема Эйлера. *Периодическая непрерывная дробь всегда представляет квадратичную иррациональность.*

Справедливость этой теоремы для некоторых частных случаев мы уже обнаружили (см. § 3, примеры 1 и 2).

Для чисто периодических дробей мы докажем теорему тем же методом, каким мы пользовались при вычислении периодической дроби $[1, 1, 1, \dots]$.

Пусть дана дробь

$$x = [(a, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})].$$

Мы имеем, очевидно:

$$x = [a, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x].$$

По формуле (11) имеем поэтому:

$$x = \frac{P_k x + P_{k-1}}{Q_k x + Q_{k-1}},$$

где P_{k-1} , P_k , Q_{k-1} , Q_k — целые числа. Следовательно, x удовлетворяет квадратному уравнению:

$$Q_k x^2 + (Q_{k-1} - P_k)x - P_{k-1} = 0,$$

коэффициенты которого — целые числа.

Перейдем теперь к доказательству теоремы для смешанных периодических дробей.

Пусть имеем такую дробь:

$$x = [a, a_1, \dots, a_{h-1}, (a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+k-1})].$$

Легко видеть, что

$$x = [a, a_1, \dots, a_{h-1}, x_h],$$

где

$$x_h = [(a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+k-1})].$$

С другой стороны,

$$x = [a, a_1, \dots, a_{h-1}, a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+k-1}, x_h].$$

По формуле (11) мы поэтому находим:

$$x = \frac{P_h x_h + P_{h-1}}{Q_h x_h + Q_{h-1}}$$

и

$$x = \frac{P_{h+k} x_h + P_{h+k-1}}{Q_{h+k} x_h + Q_{h+k-1}},$$

где все P и Q — целые числа.

Решив каждое из этих равенств относительно x_h и приравнявая оба значения, найдем:

$$\frac{-Q_{h-1}x + P_{h-1}}{Q_h x - P_h} = \frac{-Q_{h+k-1}x + P_{h+k-1}}{Q_{h+k}x - P_{h+k}}.$$

Освободившись от знаменателей, перенеся все члены в левую часть и расположив их по убывающим степеням x , мы убеждаемся в том, что x удовлетворяет квадратному уравнению:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

где A , B и C — целые числа, а именно:

$$A = Q_h Q_{h+k-1} - Q_{h-1} Q_{h+k},$$

$$B = P_{h-1} Q_{h+k} + P_{h+k} Q_{h-1} - P_{h+k-1} Q_h - P_h Q_{h+k-1},$$

$$C = P_h P_{h+k-1} - P_{h-1} P_{h+k}.$$

Таким образом мы доказали теорему Эйлера вполне.

Теорема Лагранжа. *Квадратичная иррациональность всегда разлагается в периодическую непрерывную дробь.*

Доказательство. Пусть x — любая квадратичная иррациональность. Тогда x удовлетворяет некоторому квадратному уравнению:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (31)$$

с целыми коэффициентами a , b и c .

Если мы разложим x в непрерывную дробь, то по формуле (11) найдем:

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}}.$$

Подставив это значение x в предыдущее уравнение, мы найдем квадратное уравнение для x_n :

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = 0, \quad (32)$$

где

$$a_n = aP_n^2 + bP_n Q_n + cQ_n^2,$$

$$b_n = 2aP_n P_{n-1} + b(P_n Q_{n-1} + P_{n-1} Q_n) + 2cQ_n Q_{n-1},$$

$$c_n = aP_{n-1}^2 + bP_{n-1} Q_{n-1} + cQ_{n-1}^2.$$

Мы покажем теперь, что целые числа a_n , b_n и c_n могут принимать лишь ограниченное число значений, и, следовательно, для

определения x_n мы получаем лишь ограниченное число уравнений вида (32). В самом деле, имеем по формуле (21):

$$\frac{P_n}{Q_n} = x + \frac{\alpha}{Q_n^2} \quad |\alpha| < 1,$$

или

$$P_n = Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n}.$$

Подставляя это значение в выражение для a_n , найдем:

$$\begin{aligned} a_n &= a \left(Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n} \right)^2 + b \left(Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n} \right) Q_n + c Q_n^2 = \\ &= (ax^2 + bx + c) Q_n^2 + 2ax\alpha + a \frac{\alpha^2}{Q_n} + b\alpha. \end{aligned}$$

Но первый член последнего выражения равен нулю, так как x удовлетворяет уравнению (31), следовательно,

$$|a_n| \leq 2|ax\alpha| + \left| a \frac{\alpha^2}{Q_n} \right| + |b\alpha|.$$

Заменив здесь α через единицу, мы получим:

$$|a_n| < 2|ax| + |a| + |b|.$$

Таким образом a_n при данном x может действительно принимать лишь конечное число значений, так как правая часть не зависит от n . Аналогичное неравенство мы получаем для $|c_n|$, так как $c_n = a_{n-1}$. Нам остается теперь доказать наше утверждение для b_n . С этой целью воспользуемся опять теоремой приближения. Именно, по формулам (21) и (19) имеем:

$$P_n = Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n}, \quad P_{n-1} = Q_{n-1} x + \frac{\alpha_1}{Q_n}, \quad |\alpha| < 1, \quad |\alpha_1| < 1.$$

Подставляем эти значения в выражение для b_n и находим:

$$\begin{aligned} b_n &= 2a \left(Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n} \right) \left(Q_{n-1} x + \frac{\alpha_1}{Q_n} \right) + b \left(Q_n x + \frac{\alpha}{Q_n} \right) Q_{n-1} + \\ &\quad + b \left(Q_{n-1} x + \frac{\alpha_1}{Q_n} \right) Q_n + 2c Q_n Q_{n-1} = \\ &= 2Q_{n-1} Q_n (ax^2 + bx + c) + 2ax \left(\alpha \frac{Q_{n-1}}{Q_n} + \alpha_1 \right) + 2a \frac{\alpha\alpha_1}{Q_n} + \\ &\quad + b \left(\alpha \frac{Q_{n-1}}{Q_n} + \alpha_1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем следующую оценку для b_n :

$$|b_n| < 4|ax| + 2|a| + 2|b|,$$

и наше утверждение доказано также для b_n .

Таким образом мы нашли, что для полных частных x_n квадратичной иррациональности x имеем лишь конечное число различных значений. Отсюда следует, что существуют такие числа h и k , что

$$x_h = x_{h+k}.$$

Но тогда

$$x_{k+1} = x_{k+k+1}, \quad x_{k+2} = x_{k+k+2}, \dots$$

а это означает, что x разлагается в периодическую непрерывную дробь.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II, Арифметика, гл. III.
 2. Г. Вебер и И. Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. I, гл. XV.
 3. И. А. Серре, Курс высшей алгебры, ч. первая, гл. I и II.
 4. А. Я. Хинчин, Цепные дроби. М.—Л., 1935.
 5. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin, 1913. К этой книге приложен обширный список литературы.
-

(Нижеследующие задачи предложены на заключительном туре Московской математической олимпиады 1935 г. Решения присылать по адресу: Москва, центр, Б. Комсомольский, 6, помещение 5, Главная редакция общетехнической литературы и номографии. Редакции «Математического просвещения»).

113. Дана окружность и на ней три точки M, N, P , в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

114. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под большим углом, чем из найденных.

115. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A'B'C'$. Прямая AB пересекается с прямой $A'B'$; прямая BC — с прямой $B'C'$; прямая CA — с прямой $C'A'$. Доказать, что прямые AA', BB', CC' или пересекаются все три в одной точке, или параллельны друг другу.

116. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$x + y = 2, \quad xy - z^2 = 1.$$

117. Решить систему уравнений:

$$x^3 - y^3 = 26, \quad x^2y - xy^2 = 6.$$

118. Найти сумму:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n+1)^3.$$

119. Выбраны шесть различных цветов; требуется раскрасить шесть граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами это можно сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в двенадцать различных цветов.

120. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трех положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

Тот же вопрос для разложений на сумму четырех слагаемых.

121. Будем обозначать $M(a, b)$ общее наименьшее кратное двух чисел a и b . Доказать формулу:

$$M(a, b) \cdot D(a, b) = ab.$$

Для трех чисел доказать формулу:

$$M(a, b, c) \cdot D(a, b) \cdot D\left(\frac{ab}{D(ab)}, c\right) = abc.$$

Решения задач

51. Решить систему уравнений:

$$x^2 = a + (y - z)^2; \quad y^2 = b + (z - x)^2; \quad z^2 = c + (x - y)^2.$$

Собрав члены, содержащие неизвестные, в левых частях уравнений и разложив левые части на множители, получим:

$$(x + y - z)(x - y + z) = a; \quad (y + z - x)(y - z + x) = b; \\ (z + x - y)(z - x + y) = c.$$

Почленное произведение первых двух уравнений делим на третье. Получим:

$$(x+y-z)^2 = \frac{ab}{c}, \quad \text{или} \quad x+y-z = \pm \sqrt{\frac{ab}{abc}}.$$

Аналогично будем иметь:

$$z+y-x = \pm \sqrt{\frac{bc}{abc}}; \quad x-y+z = \pm \sqrt{\frac{ac}{abc}}.$$

Из полученной системы трех линейных уравнений найдем:

$$x = \pm \frac{a(b+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad y = \pm \frac{b(a+c)}{2\sqrt{abc}}; \quad z = \pm \frac{c(a+b)}{2\sqrt{abc}}.$$

Знаки берутся или все верхние, или все нижние.

Бобылев В. (Тула), Алексеев И. А. (Казань), Горолов С. П. (Кадиевка), Ефимов В. П. (Сходня), Карпушин В. Б. (Тула), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Соловьев Е. П. (Одесса), Шахтактинский М. (Баку).

52. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

при вещественных a, b, c не имеет комплексных корней.

После освобождения от знаменателей и приведения подобных членов уравнение принимает вид:

$$3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca) = 0.$$

Это уравнение имеет комплексные корни только в том случае, если выражение

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

отрицательно; в противном случае корни уравнения действительны.

Но из очевидного неравенства

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

следует, после раскрытия скобок, приведения подобных членов и сокращения на 2:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0.$$

Это значит, что уравнение имеет лишь действительные корни.

Алексеев И. А. (Казань), Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Ефимов В. П. (Сходня), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтактинский М. (Баку).

53. Найти предел выражения $\left(\cos \frac{a}{x}\right)^x$, когда x неограниченно возрастает, принимая последовательно целые значения $x=1, 2, 3, \dots$ до бесконечности.

Рассмотрим разность $1 - \cos^x \frac{a}{x}$; при достаточно большом целом положительном x , имеем:

$$\begin{aligned} 0 < 1 - \cos^x \frac{a}{x} &= \left(1 - \cos \frac{a}{x}\right) \left(1 + \cos \frac{a}{x} + \cos^2 \frac{a}{x} + \dots + \cos^{x-1} \frac{a}{x}\right) < \\ &< 2 \sin^2 \frac{a}{2x} \cdot x = \frac{\sin \frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} \cdot a \sin \frac{a}{2x}. \end{aligned}$$

(Неравенство усилилось от замены всех косинусов во второй скобке единицами.)

Так как для $x > \frac{a}{\pi}$, $0 < \frac{\sin \frac{a}{2x}}{\frac{a}{2x}} < 1$, то

$$0 < 1 - \cos^x \frac{a}{x} < a \sin \frac{a}{2x}.$$

Но $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a \sin \frac{a}{2x} \right) = 0$; следовательно, также

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \cos^x \frac{a}{x} \right) = 0,$$

откуда следует, что предел $\cos^x \frac{a}{x}$ равен единице.

Вейланд А. Ф. (Москва), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

54. Доказать, что расстояние произвольной точки окружности от хорды есть среднее пропорциональное между расстояниями от той же точки до касательных, проведенных в концах этой хорды.

Пусть ABC — треугольник, образованный хордой AB и касательными AC и BC ; пусть M — произвольная точка на дуге AB ; C_1, A_1, B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из M соответственно на AB, BC и CA . Тогда, углы B_1AM и MBA равны, так как оба измеряются половиной дуги AM ; углы A_1BM и MBC равны, так как оба измеряются дугой MB . Поэтому

$$\triangle B_1AM \sim \triangle C_1BM; \quad \triangle A_1BM \sim \triangle C_1AM.$$

Отсюда

$$\frac{M_1B_1}{AM} = \frac{M_1C_1}{MB}; \quad \frac{MA_1}{MB} = \frac{MC_1}{BM}.$$

Перемножив почленно эти равенства, после сокращения получим:

$$MB_1 \cdot MA_1 = MC_1^2.$$

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Ефимов В. П. (Сходия), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

55. Н а й т и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)}.$

Заметив, что

$$\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x) = \frac{\sin[(a+x) - (a-x)]}{\cos(a+x) \cos(a-x)} = \frac{\sin 2x}{\cos(a+x) \cos(a-x)};$$

$$\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x) = \operatorname{arctg} \frac{(a+x) - (a-x)}{1 + (a+x)(a-x)} = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 + a^2 - x^2}.$$

Заменив эти бесконечно малые эквивалентными или бесконечно малыми

$$\frac{2x}{\cos(a+x) \cos(a-x)} \quad \text{и} \quad \frac{2x}{1 + a^2 - x^2}, \quad \text{получим:}$$

$$\frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)} \approx \frac{1 + a^2 - x^2}{\cos(a+x) \cos(a-x)}.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}{\operatorname{arctg}(a+x) - \operatorname{arctg}(a-x)} = \frac{1 + a^2}{\cos^2 a}.$$

Требуется оговорки случай $a = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — целое число. В этом случае дробь неограниченно возрастает.

56. Доказать, что

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \dots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}, \\ \frac{n+1}{(n+2)!} &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{n+p-1}{(n+p)!} &= \frac{1}{(n+p-1)!} - \frac{1}{(n+p)!}, \\ \frac{n+p}{(n+p+1)!} &= \frac{1}{(n+p)!} - \frac{1}{(n+p+1)!}. \end{aligned}$$

Сложив почленно, получим искомое равенство.

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

57. Исключить θ и φ из уравнений:

$$a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta = m; \quad b \sin^2 \varphi + a \cos^2 \varphi = n; \quad a \operatorname{tg} \theta = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Разделив обе части первого уравнения на $\sin \theta \cos \theta$ и умножив правую часть на $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{a \sin^2 \theta + b \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} &= m \cdot \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}, \\ a \operatorname{tg} \theta + b \operatorname{ctg} \theta &= m \operatorname{tg} \theta + m \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned}$$

или

$$(a - m) \operatorname{tg}^2 \theta = m - b.$$

Аналогично из второго уравнения получаем:

$$(n - a) = (b - n) \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Перемножив почленно два последних уравнения, получим:

$$(a - m)(n - a) \operatorname{tg}^2 \theta = (b - n)(m - b) \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Сопоставляя с третьим уравнением, имеем окончательно:

$$(a - m)(n - b)b^2 = (b - n)(m - b)a^2.$$

Шахтахтинский М. (Баку), Вейланд А. Ф. (Москва), Городов С. П. (Кадиевка), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

58. Показать, что если a, b, c — стороны треугольника, то корни уравнения

$$b^2 x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

будут мнимыми.

Корни этого уравнения будут мнимыми, если будет положительно выражение:

$$\begin{aligned} 4b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) = \\ &= [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2] = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c). \end{aligned}$$

Но это выражение всегда положительно, так как оно равно $16 \Delta^2$, где Δ — площадь треугольника.

Алексеев П. А. (Казань), Бобылев В. (Тула), Ефимов В. П. (Сколня), Соловьев Е. П. (Одесса), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

59. Доказать, что прямые, соединяющие вершины треугольной пирамиды с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

Пусть A, B, C, D — вершины трехгранной пирамиды и A', B', C', D' — центры тяжести противолежащих им граней соответственно. Прямые DC' и CD'

проходят через середину ребра AB ; следовательно, DC' и CD' пересекаются и лежат в одной плоскости. Поэтому DD' и CC' также лежат в одной плоскости и поэтому пересекаются в некоторой точке M . Аналогично можно показать, что BB' пересекается как с CC' , так и с DD' . Если BB' не проходит через точку M и пересекает CC' и DD' в разных точках, то она лежит в плоскости последних двух прямых; но это невозможно, так как точка B не лежит в этой плоскости. Поэтому прямая BB' проходит через точку M . На том же самом основании можно утверждать, что и прямая AA' проходит через точку M .

Бобылев В. (Тула), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

60. Показать, что если α и β корни уравнения

$$x^2 + px + 1 = 0,$$

а γ и δ — корни уравнения

$$x^2 + qx + 1 = 0,$$

то

$$(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) = q^2 - p^2.$$

Очевидно,

$$\alpha + \beta = -p; \quad \gamma + \delta = -q; \quad \alpha\beta = 1; \quad \gamma\delta = 1.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)(\alpha + \delta)(\beta + \delta) &= (\alpha - \gamma)(\beta + \delta) \cdot (\beta - \gamma)(\alpha + \delta) = \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma) = \alpha\beta\delta^2 - \beta^2\delta - \alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma^2 = \\ &= \alpha\beta(\delta^2 + \gamma^2) - \gamma\delta(\alpha^2 + \beta^2) = \delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 = \\ &= (\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2) - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = (\delta + \gamma)^2 - (\alpha + \beta)^2 = q^2 - p^2. \end{aligned}$$

Бобылев В. (Тула), Вейланд А. Ф. (Москва), Городов С. П. (Кадиевка), Лебедевская В. П. (Саратов), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье), Шахтахтинский М. (Баку).

61. Пересечь данную трехгранную пирамиду так, чтобы в сечении получился ромб.

На ребре BC пирамиды $ABCD$ находим точку M , так, чтобы было:

$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{CD}$, и через точку M проводим плоскость, параллельную ребрам AB и CD . Доказательство правильности построения не представляет труда.

62. По четырем сторонам трапеции вычислить ее диагонали.

Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $AB = a$, $CD = b$ и боковыми сторонами $AD = c$, $CB = d$; H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на AB , и K — точка пересечения стороны AB с прямой $CK \parallel AD$.

Обозначим искомые диагонали $AC = m$, $BD = n$. Тогда из треугольника ABC

$$m^2 = a^2 + d^2 \mp 2ak;$$

из треугольника CKB :

$$c^2 = (a - b)^2 + d^2 \mp 2(a - b)k.$$

Умножаем первое уравнение на $(a - b)$, второе на $-a$ и складываем почленно; получаем:

$$m^2(a - b) - c^2a = ab(a - b) - d^2b.$$

Отсюда

$$m^2 = ab + \frac{c^2a - d^2b}{a - b}.$$

Аналогично

$$n^2 = ab + \frac{d^2a - c^2b}{a - b}.$$

Требует оговорки случай $a = b$, так как в этом случае полученные формулы не имеют смысла.

Если $a = b$, то трапеция оказывается параллелограмом. Для вычисления диагоналей параллелограмма знания его сторон недостаточно. Следовательно, при $a = b$ задача неопределенная.

Шахтахтинский М. (Баку), Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

63. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведена секущая, вторично пересекающаяся с окружностями в точках P и Q . Найти геометрическое место точек, описываемое серединой M отрезка PQ , когда секущая вращается около A .

Пусть O и O_1 — центры двух окружностей и F — середина отрезка OO_1 . Из точек O , O_1 и F опустим перпендикуляры на прямую PQ ; их основания назовем K , K_1 и C . Так как $KC = CK_1$, то имеем:

$$\begin{aligned} MC &= PK + KC - PM = \frac{PA}{2} + \frac{KK_1}{2} - \frac{PQ}{2} = \\ &= \frac{PA}{2} + \frac{KK_1}{2} - \frac{PA}{2} - \frac{AQ}{2} = CD - AD = CA. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что прямоугольные треугольники FCM и FCA , как имеющие равные катеты, равны, и потому $FM = FA$. Следовательно, геометрическим местом точек M является окружность с центром в F , проходящая через A .

Сергиенко Ф. Ф. (Запорожье).

64. Три грани трехгранного угла с взаимно перпендикулярными ребрами пересекают шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих кругов не изменится, если повернуть этот трехгранный угол около его вершины так, чтобы его грани не пересеклись.

Пусть d — расстояние от вершины трехгранного угла до центра шара, R — радиус шара, r_1 , r_2 , r_3 — радиусы кругов C_1 , C_2 , C_3 , по которым грани трехгранного угла пересекают шар, и h_1 , h_2 , h_3 — расстояния от центра шара до этих граней. Так как основания перпендикуляров h_1 , h_2 , h_3 падают в центры кругов C_1 , C_2 , C_3 , то имеем:

$$r_1^2 = R^2 - h_1^2; \quad r_2^2 = R^2 - h_2^2; \quad r_3^2 = R^2 - h_3^2.$$

Далее, d есть диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами h_1 , h_2 , h_3 . Поэтому

$$d^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Сумма площадей трех кругов выразится так:

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_3^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi [3R^2 - (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)] = \pi (3R^2 - d^2).$$

Эта сумма зависит только от R и d , которые не изменяются при повороте трехгранного угла вокруг вершины; следовательно, при этом не изменяется и S .

65. Найти непрерывную функцию $F(x)$, удовлетворяющую при всяком значении x соотношению

$$a \cdot F(x+1) - b \cdot F(x) = cx + d, \quad (1)$$

где a , b , c , d — данные числа, $F(0) = N$, и на интервале от 0 до 1 функция линейна.

Искомая функция может быть линейной лишь при условии $a \neq b$, так как при $a = b$ в левой части (1) старшие члены взаимно уничтожились бы и в левой части оказалось бы постоянное, между тем как в правой части стоит линейный многочлен.

При $a \neq b$, $F(x)$ — линейная функция вдоль всей оси OX ; коэффициенты ее можно найти методом неопределенных коэффициентов:

$$F(x) = \frac{cx}{a-b} + \frac{cd - bd - ac}{(a-b)^2}.$$

67. Показать, что корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ суть:

$$4 \cos^2 \frac{\pi}{7}; \quad 4 \cos^2 \frac{2\pi}{7}; \quad 4 \cos^2 \frac{3\pi}{7}.$$

Приняв обозначения $x_k = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{7}$ ($k = 1, 2, 3$), мы должны показать что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5; \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 6; \quad x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Мы докажем лишь первое из этих трех равенств.
Заметим, что

$$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \right. \\ &+ 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \Big) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \right. \\ &+ \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \Big) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Теперь получим:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \left(\cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7} \right) = \\ &= 4 \left[\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} \right] = \\ &= 6 + 2 \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) = 6 - 1 = 5.\end{aligned}$$

Преобразования аналогичного характера позволяют доказать два других равенства.

68. Решить уравнение $x^3 + 9x^2 - 33x + 27 = 0$.

Полагая $x = y - 3$ и применяя формулу Кардана, получим:

$$x_1 = -3 - \sqrt[3]{10}(2 + \sqrt[3]{10}); \quad x_{2,3} = -3 - \sqrt[3]{10}[-2 + \sqrt[3]{10} \pm i(2\sqrt[3]{3} \mp \sqrt[3]{30})].$$

Вейланд А. Ф. (Москва).

69. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} 2x}$

Ответ: $+1$.

Ефимов В. П. (Сходня), Городов С. П. (Кадиевка).

70. Вычислить площадь, ограниченную кривой $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 11x - 7 = 0$.

Обычными методами аналитической геометрии устанавливаем, что кривая — эллипс с полуосями $a = 1$; $b = \sqrt{2}$. Отсюда площадь кривой $S = \pi ab = \pi \sqrt{2}$.

Ефимов В. П. (Сходня), Городов С. П. (Кадиевка).

71. Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha).$$

Следует показать, что $f^{(n)}(0) = \sin n\alpha$. После этого легко получить:

$$e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha) = x \sin \alpha + \frac{x^3}{2!} \sin 2\alpha + \frac{x^5}{3!} \sin 3\alpha + \dots$$

J. Steiner, Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln, worunter eine grosse Anzahl neuer Untersuchungen und Sätze vorkommen, in einem systematischen Entwicklungsgange dargestellt, von J. Steiner, privatlehrer in Berlin. O. Füssli. 1931. 8° XVIII+344 стр.

Замечательная книга и замечательная судьба. Знаменитый Штейнер, тогда Privatlehrer in Berlin (он перед этим бросил преподавание в Вердеровской гимназии и жил частными уроками) имел тогда всего 29—30 лет. Особенно интенсивно работал он над этими вопросами в 1824 г. К началу 1825 г. он настолько подвинулся, что мог начать уже систематическое изложение. Он завел журнал, в который, начиная с 7 января 1825 г., стал вносить систематически свои результаты с чрезвычайной наглядностью и ясностью, почти без помарок, — до такой степени материал этот был им уже выношен. Последняя запись в журнале — 2 августа. Вероятно, вскоре он начал вторичную обработку, предполагая разделить материал, но написал только первую часть — четыре главы — о круге (теория центров и осей подобия, степени относительно круга и об углах, под которыми пересекаются круги), только во второй части предполагая перейти в шару. Третья часть должна была трактовать о кругах на сфере и их пересечениях. Но и это изложение не удовлетворило автора. Повидимому, он стал чувствовать, что теории круга и шара так тесно переплетаются, что нельзя их излагать отдельно. И он подверг свой труд новой переработке; те случаи вырождения кругов и шаров в точки, которые во второй редакции предполагалось выделить в особую главу, введены в соответствующих местах в текст. Подразделение каждой главы на изложение теорем и на задачи и построение, принятое во второй редакции, было постепенно оставлено. В таком виде получилась готовая для печати рукопись, правда не доведенная до первоначального конца: пересечение кругов, расположенных на сфере, осталось неизложенным. И все же работа в печати не появилась. Два раза Штейнер на нее ссылается, — сначала в «Einige geometrische Betrachtungen», представляющую частично извлечение из этой работы, потом — в предисловии к своей большой основной работе «Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten», где он вводит свою работу в общий план своего рода геометрической энциклопедии в качестве заключительной части с добавлением приложений стереографической проекции. Но этот широкий план остался невыполненным до конца.

Самая рукопись считалась долгое время утраченной, и только в 1896 г. ее разыскал Бютценбергер (Bützenberger), как он об этом рассказал в «Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht, но только еще через 35 лет оказалось возможным ее отпечатать. Выполнено издание (и выполнено очень тщательно) по поручению Швейцарского общества естествоиспытателей при материальной поддержке «Escher-Abegg Stiftung» профессорами Фуетер (Fueter) и Гонсет (Gonseth), и вот через 100 с лишним лет мы знакомимся с произведением молодости великого геометра...

Первый отдел книги посвящен точкам и прямым (теперь — центрам и осям) подобия двух и трех кругов одной плоскости (гл. I) и точкам, прямым и плоскостям подобия двух, трех и четырех шаров.

Отдел второй трактует о степени точки в отношении круга (соответственно шара) и геометрическом месте равных степеней: в гл. 1-й — относительно кругов, в главе 2-й — относительно шаров.

Третий отдел говорит об общей степени у кругов (гл. 1-й) и шаров (гл. 2-й) и четвертой отдел — об углах, под которыми пересекаются круги одной плоскости (гл. 1-я) и соответственно шары (гл. 2-я).

В последнем § 40 этого отдела сосредоточены те следствия и частные выводы, которые могут быть сделаны из предшествующего изложения, а также основанное на них решение ряда задач на пересечении шаров. При этом к первому разделу отнесены более легкие и простые задачи (когда по величине и положению даны 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и до 8 шаров), ко второму более трудные задачи на касание, к третьему — на пересечение шаров.

Удивительно построена книга. Начиная с самых простых исходных пунктов, почти без чертежей, применяя очень удачное обозначение, Штейнер доходит без труда до сложнейших задач, обнаруживая поразительное мастерство геометрического изложения. Видно, с какою любовью все это продумано, взвешено и систематизировано.

Но хотя сам автор относил свою работу к «Элементарной геометрии», на самом деле это далеко не так по содержанию: автор не ограничивается так называемой «низшей геометрией кругов и шаров», а переходит и к «высшей» (в предисловии один из издателей, проф. Гонсет, вскрывает эту связь). Здесь достаточно указать, что вводимая Штейнером (§ 39,14) общая огибающая двух систем сопряженных шаров — «предельная поверхность» (*Grenzfläche*) — есть не что иное, как циклида Дюпена.

У нас теперь выходит не мало интересных и важных сочинений по разным — и самым специальным — отделам высшей математики как оригинальных, так и переводных. Сравнительно мало при этом представлена геометрия. Можно бы дать целый список книг, которые составили бы целую библиотеку для учителя и учащегося средней, а может быть, и высшей школы. К числу их я бы отнес это сочинение Штейнера, вслед за его «Геометрическими построениями» и «*Systematische Entwicklung*».

Д. М. Синцов (Харьков).

УКАЗАТЕЛЬ КНИГ И ЖУРНАЛЬНЫХ СТАТЕЙ, ВЫШЕДШИХ ВО ВТОРОЙ ПОЛОВИНЕ 1934 г.

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

СОКРАЩЕНИЯ

- Д.— Доклады Академии наук СССР.
З. Г.— Записки Ленинградского горного института.
И. У.— Известия Уральского лесотехнического института.
М. П.— Математическое просвещение.
М. С.— Математический сборник.
М. Ф.— Математика и физика в средней школе. Методический сборник.
С.— Социалистическая реконструкция и наука.
Т. Л. П.— Труды Ленинградского института инженеров промышленного строительства.
Т. М.— Техника молодежи.
У. М.— Ученые записки Московского государственного университета.
Ф. Н. Т.— Фронт науки и техники.
Э. М.— Элементарная математика в средней школе. Непериодический сборник, Ленинград 1934.
-

7. Теория вероятностей

- Горин Н. П., Некоторые замечания о геометрических вероятностях, И. У. 1934, 3.
Казанский А., Об одном случае предельной теоремы исчисления вероятностей, З. Г. 1934, 8.
Кузьмин Р. О., О методе Ляпунова в теории вероятностей, Т. Л. П. 1934, 2.
Павский В. Д., Об одном общем выражении для доживаемости в условиях смертности данного календарного промежутка (Математическая вероятность доживания до заданного возраста), Д. 1934, I, 7.
Фрай Т., Теория вероятностей для инженеров. Перевод и предисловие проф. А. Я. Хинчина, М.—Л. 1934. Содержание: Введение. Перестановки и сочетания. Элементарные принципы теории вероятностей. Вероятность и опыт. Теорема Бейеса. Функции распределения и непрерывно изменяющиеся величины. Средние значения. Функции распределения, наиболее часто встречающиеся в инженерном деле. Подбор кривых распределения. Приложение теории вероятностей к проблемам скученности. Флуктуация в физических явлениях. Таблицы I—XIII. Имеются таблицы приближенных факториалов с 8 знаками (до 200!) и логарифмов факториалов целых чисел до 1 200.
Хинчин А. Я., Случай и как наука с ним справляется, М.—Л. 1934. Популярная библиотека по математике под ред. проф. Л. А. Люстерника.
Хинчин А., Основные задачи современной теории вероятностей, Ф. Н. Т. 1934, 5—6.
Mises R., Problème de deux races, М. С. 41 : 3, М. 1934.

8. Геометрия

- Белонковский П., О рациональных треугольниках, М. Ф. 1934, 3.
Автор указывает на связь задачи с теорией триничных квадратичных форм.

в области целых комплексных чисел. О неопределенных уравнениях: $x+y+z=xyz$ и $lx_1^2+my_1^2=nz_1^2$, где x_1, y_1, z_1 — комплексные числа. Приведена литература.

Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана (с 42 чертеж.), М.—Л. 1934. Элементарно-синтетическое изложение основ эллиптической геометрии Римана.

Бончковский Р. Н., Геометрическое суммирование одного ряда, М. П. 1934, 1. О факториальном ряде.

Бызов Л. А., Топохронограмма — способ записи событий в пространстве и времени, С. 1934, 4.

Бюшгенс С. С., Аналитическая геометрия. 1-й концентр в. 1, М.—Л. 1934. Учебник содержит аналитическую геометрию на плоскости и 313 задач с решениями. В главе III § 4 — обзор истории аналитической геометрии.

Воронец А. М., Геометрия циркуля. Для учащихся средней школы. 37 задач на построение, М.—Л. 1934.

Гинзбург А. М., Симметрия на плоскости. 113 рис., Харьков 1934.

Глаголев Н. А., Теоретические основы номографии, М.—Л. 1934. Изложение общей теории номограмм проективного типа. Основные присмы коллинеарного преобразования номограмм. Основные типы непроективных номографических абзакв. 181 чертеж. Ручководство для студентов вузов и вчзв.

Домбровский Ч., Приложение метода функциональных шкал к решению треугольника по трем биссектрисам внутренних углов, М. Ф. 1934, 3. Приближенное решение системы уравнений четвертой степени.

Ермолова О. В. и Перепелкин Д. И., Учебный атлас по номографии, М. 1934. 53 номограммы с объяснительным текстом. Под ред. Н. А. Глаголева. В приложенном к атласу объяснительном тексте содержится описание методов построения важнейших номограмм.

Жеребцов В. Г., Аппарат для вычерчивания кривых второго порядка, У. М. 1934, 2.

Зернов, Практическая номография, 1934.

Зетель С. И., О делении сторон треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон, М. П. 1934, 1. О следствиях из теоремы Чевы.

Зетель С. И., Теорема Жергона и следствия из нее, М. Ф. 1934, 3. Работа по геометрии треугольника.

Зетель С. И., Об одном замечательном случае неравенства треугольников, М. Ф. 1934, 1. Развитие работ Gelin'a и Pourgotti о неравных треугольниках, у которых углы и две стороны одного равны углам и двум сторонам другого. Примеры: 8, 12, 18 и 12, 18, 27. Автор указывает способ получения таких треугольников.

Зимин М., О тригонометрических тождествах вида: $f(\sin x) = f(\cos x)$, М. Ф. 1934, 1.

Каратеодори, Конформные отображения. Пер. с англ. М. Келдыш, М.—Л. 1934. Сод.: Преобразования Мебиуса. Неевклидова геометрия. Элементарные преобразования Лемма Шварца. Основные теоремы о конформных отображениях. Соответствие границ. Отображение замкнутых поверхностей.

Кароннэ Т., Об описанных четырехугольниках, М. П. 1934, 1. Способ построения четырехугольника, описанного около окружности. Пер. с франц.

Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II. Геометрия, М.—Л. 1934. В обработке Е. Геллингера с добавлением Ф. Зейфарта. Пер. с 3-го изд. под ред. Д. А. Крыжановского. Сод.: Простейшие геометрические образы. Геометрические преобразования. (Аффинные, проективные, высшие точечные, с изменением пространственных элементов, теория мнимых элементов.) Систематика и обоснование геометрии. Преподавание геометрии. Добавление.

Кованько А. С., Основания теории измерения поверхностей, Э. М.—Л. 1934.

Коврайский В. В., Математическая картография, М.—Л. 1934, 276 стр. Картографические табл. I—VI. Указатель.

Комарницкий, Аналитическая геометрия. 6-е и 7-е изд., М.—Л. 1934, 6-е изд. под ред. и с дополнением проф. Б. Н. Делонэ. Учебное пособие для вузов и университетов. В приложении даны некоторые сведения из теории определителей, главные формулы и уравнения. 150 задач.

Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 4-е изд., М.—Л. 1934. 456 стр. Содержание: Векторная алгебра. Векторный анализ. Аффинные ортогональные тензоры. Элементы общей теории тензоров.

Люстерник Л. А., Геодезические линии. С портр. Я. Бернулли. М.—Л. 1934. Сод.: кратчайшие линии на многогранных поверхностях, на цилиндре и конусе. Сведения из теории плоских и пространственных кривых. Теорема Я. Бернулли.

Ляпин С. Е., Тригонометрические уравнения, Э. М., Л. 1934. Подробные решения отдельных и систем тригонометрических уравнений, встречающихся в курсе средней школы.

Милинский В. И., Дифференциальная геометрия. Л. 1934. Подробный курс для вузов. Список русской и иностранной литературы. Сод.: Кривые плоские и в пространстве. Поверхности. Линии на поверхности. Кривизна поверхностей. Линейчатые поверхности.

Мелентьев П. В., Номография, 2-е изд., Л.—М. 1934.

Мусхелишвили Н. И., Курс аналитической геометрии, ч. 2, М.—Л. 1934. Алгебраическое изложение, в отличие от ч. 1. Сод.: Простейшие уравнения и элементарные свойства конических сечений. Элементарные сведения относительно линейных и квадратичных форм. Мнимые и несобственные элементы. Однородные координаты. Понятие об аффинных и проективных свойствах. Исследование и упрощение общего уравнения линии второго порядка. Пересечение линии второго порядка с прямыми. Касательная. Диаметры. Исследование вида отдельных поверхностей второго порядка. Пересечение поверхностей второго порядка с прямыми. Приведение общего уравнения к нормальному виду. 61 задача с решениями.

Покровский Г., Задачи по геометрии, иллюстрирующие «инерцию мысли», Т. М. 1934, 8.

Поляков С., Доказательство теоремы Паппа-Гульдена методом неделимых, М. Ф. 1934, 3. Объем и боковая поверхность призмы.

Привалов И. И., Аналитическая геометрия, 7-е изд., М.—Л. 1934.

Рыбкин Н., Сборник задач по геометрии для средней школы, 3-е изд., ч. 1—Планиметрия, ч. 2—Стереометрия. М.—Л. 1934.

Цубербиллер О. Н., Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 9-е изд., М.—Л. 1934.

Чистяков И. И., О рациональных треугольниках. М. П. 1934, в. 1. Имеется таблица 65 рациональных треугольников, содержащая новые данные.

Широков П. А., Тензорное исчисление, ч. 1. Алгебра тензоров. Л.—М. 1934. Курс, читанный в Казанском университете.

Шмудевич П. К., Учебник прямолинейной тригонометрии, 3-е изд., М.—Л. 1934. Даны задачи и список формул.

Яковлев П., Обобщение теоремы Пифагора, М. Ф. 1934, № 2. О параллелограммах, построенных на сторонах треугольника.

Liebm ann H., Syntetische Geometrie, Leipzig. 1934.

Nowlan F., Analytic geometry, N-Y. 1934.

Poor V. C., Analytical geometry, N-Y. 1934.

Sim merv ille D., Analytical geometry of three dimensions, Lond. 1934, 432 стр.

Steinitz E., Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie, Berl. Springer 1934, 351 стр.

Thébault V., Sur la géométrie du triangle, Ann. Soc. Sec. Bruxelles. 1934, 54. О треугольнике, образованном соединением оснований внутренних биссектрис данного треугольника.

9. Таблицы. Справочники

Глазенап С. П., Пятизначные таблицы логарифмов с таблицами, упрощающими вычисления, Изд. Академии наук, 1934.

Глазенап С. П., Карманные таблицы логарифмов, изд. Академии наук, Л. 1934.

Дэлл Р. В., Справочная книга по математике для инженеров и студентов вузов, 2-е изд., М.—Л. 1934, 996 стр.

Кюстер Ф. В., Таблица логарифмов для химиков, фармацевтов, врачей и физиков, Л. 1934.

Пржевальский Е., Пятизначные таблицы логарифмов, 17-е дополн. изд., М.—Л. 1934.

Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Харьков—Киев 1934. Содержит таблицы показателей, эллиптических, гиперболических, бесселевых функций и др.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

| | |
|---|----|
| С. А. Богомолов — Вписанные многогранники с ребрами, равными радиусу шара | 3 |
| С. И. Зетель — О некоторых свойствах ортоцентрического и тангенциального треугольников | 12 |
| М. С. Бритман — О простых числах вида $(2kn+1)$ | 20 |
| Н. А. Колмогоров — Аналог теоремы и тождества Стюарта | 22 |
| В. Н. Рутковский — Геометрическая теория гиперболических функций | 26 |
| Б. В. Гнеденко — О θ в формуле Лагранжа | 31 |
| И. С. Градштейн — Интегрирование одного класса дифференциальных уравнений, в которых отсутствует одна из переменных | 35 |
| А. Г. Школьник — Цилиндр Шварца | 37 |
| Б. А. Оксенов — Уравнение линии и поверхности кокона | 42 |
| Б. И. Сегал — Непрерывные дроби | 46 |
| Задачи | 68 |
| Библиография | 75 |
| Указатель книг и журнальных статей | 77 |
